บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดตามหัวข้อต่อไปนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 และการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์
2. การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม
   - 2.1 ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม
   - 2.2 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม
   - 2.3 บทบาทครูและบรรยากาศในชั้นเรียน
3. การจัดการเรียนรู้แบบปกติ
   - 3.1 ความหมายและแนวทางการจัดการเรียนรู้แบบปกติ
   - 3.2 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบปกติ
4. ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.1 ความหมายของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.2 ความสำคัญของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.3 ลักษณะของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.4 มาตรฐานทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.5 แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
   - 4.6 การวัดค่าทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
5. ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 5.1 ความหมายการสื่อสาร
   - 5.2 ความหมายทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 5.3 ความสำคัญของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 5.4 มาตรฐานทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 5.5 แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เน้นทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 5.6 การวัดค่าทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   6.1 งานวิจัยในประเทศ
   6.2 งานวิจัยต่างประเทศ
7. สรุปกรอบแนวคิดในกาวิจัย

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 และการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์

กระทรวงศึกษาธิการ (2551, หน้า 58-91) กล่าวถึงความสำคัญของหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและศาสตร์อื่นๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีสุข

คุณภาพของผู้เรียน

คุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เมื่อผู้เรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น

คุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ควรจะมีความสามารถดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริงใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้

2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่างๆเกี่ยวกับความยาว พื้นที่และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

3. สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติ โดยใช้วงเวียนและสันตรงอธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้

4. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการ และความคล้ายของรูปสามเหลี่ยมเส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (Geometric transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Refection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้

5. สามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

6. สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหาและสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและกราฟในการแก้ปัญหาได้

7. สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษาเก็บรวบข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปวงกลม หรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้

8. เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ

9. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่างๆ ได้

10. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสมใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนดังนี้

1. จำนวนและการดำเนินการ : ความคิดรวบยอด และความรู้สึกเชิงจำนวน ระบบจำนวนจริง สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง การดำเนินการของจำนวน อัตราส่วน ร้อยละ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน และการใช้จำนวนในชีวิตจริง

2. การวัด : ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่างๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ การแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ

3. เรขาคณิต : รูปเรขาคณิตและสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ การนึกภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translations) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation)

4. พีชคณิต : แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เซตและการดำเนินการของเซต การให้เหตุผลนิพจน์ สมการ ระบบสมการ อสมการ กราฟ ลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิต

5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น : การกำหนดประเด็น การเขียนข้อคำถาม การกำหนดวิธีการศึกษา การเก็บรวบรวมข้อมูล การจัดระบบข้อมูล การนำเสนอข้อมูล ค่ากลางและการกระจายของข้อมูลการวิเคราะห์ และการแปลความข้อมูล การสำรวจความคิดเห็นความน่าจะเป็น การใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นในการอธิบายเหตุการณ์ต่างๆ และช่วยในการตัดสินใจ ในการดำเนินชีวิตประจำวัน

6. ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ : การแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 2 การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด มาตรฐาน ค 2.2 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหา

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม

ทฤษฎีที่มีอิทธิพลต่อการจัดการเรียนการสอนอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นทฤษฎีที่ให้ความสำคัญที่ตัวผู้เรียน และสอดคล้องกับแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ทฤษฎีหนึ่งคือทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม ซึ่งทฤษฎีนี้เน้นว่า ความรู้เป็นสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นโดยผู้เรียน ผู้เรียนใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่ การเรียนรู้เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในตัวผู้เรียนจากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมภายนอก ผู้เรียนแต่ละคนจะสร้างความรู้ด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน ดังนั้น แนวการสอนตามทฤษฎีนี้ จึงเน้นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้สื่อสารและมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อน โดยผู้สอนคอยช่วยเหลือให้ผู้เรียนนำความรู้ที่มีอยู่ออกมาใช้ และไตร่ตรองสิ่งที่ได้จากการอภิปรายกับผู้อื่น ผู้สอนมีหน้าที่จัด

สภาพแวดล้อมการเรียนรู้ให้เหมาะสม ตั้งประเด็นปัญหาที่ท้าทาย และช่วยเหลือให้ผู้เรียนสร้างความรู้ได้เอง

2.1 ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม

ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม (Constructivism) เชื่อว่าการเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในของผู้เรียน โดยมีผู้เรียนเป็นผู้สร้าง (Construct) ความรู้จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบเห็นกับความรู้ความเข้าใจเดิมที่มีมาก่อน โดยพยายามนำความเข้าใจเกี่ยวกับเหตุการณ์และปรากฏการณ์ที่ตนพบเห็นมาสร้างเป็นโครงสร้างทางปัญญา หรือที่เรียกว่า สกีมา (Schema) ซึ่งเป็นหน่วยที่เล็กที่สุดของโครงสร้างทางปัญญา หรือโครงสร้างของความรู้ในสมอง โครงสร้างทางปัญญานี้จะประกอบด้วย ความหมายของสิ่งต่าง ๆ ที่ใช้ภาษา หรือเกี่ยวกับเหตุการณ์ หรือสิ่งที่แต่ละบุคคลมีประสบการณ์ หรือเหตุการณ์อาจเป็นความเข้าใจหรือความรู้ของแต่ละบุคคล คอนสตรัคติวิซึม เชื่อว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการสร้างมากกว่าการรับรู้ความรู้ ดังนั้น เป้าหมายของการสอนจะสนับสนุนการสร้างมากกว่าความพยายามในการถ่ายทอดความรู้ ดังนั้น คอนสตรัคติวิซึม จะมุ่งเน้นการสร้างความรู้ใหม่อย่างเหมาะสมของแต่ละบุคคลและสิ่งแวดล้อมมีความสำคัญในการสร้างความหมายตามความเป็นจริง เป็นวิธีการที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนหลักการที่สำคัญว่า ในการเรียนรู้มุ่งเน้นให้ผู้เรียนลงมือกระทำในการสร้างความรู้ (สุมาลี ชัยเจริญ, 2556, เว็บไซต์)

แนวคิดที่เกี่ยวกับการเรียนรู้ที่เป็นพื้นฐานการเรียนรู้ในการสร้างความรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึมมีพื้นฐานมาจากทฤษฎีทางด้านจิตวิทยา และทฤษฎีเชิงสังคมวิทยา (ฆนัท ธาตุทอง, 2554, หน้า 182) กล่าวโดยสรุป ทฤษฎีทางด้านจิตวิทยามีรากฐานมาจากนักจิตวิทยาพัฒนาการชาวสวิส คือ เพียเจต์ ซึ่งเชื่อว่า การจัดการเรียนรู้นั้นมีแนวคิดว่า มนุษย์เราต้อง “สร้าง” ความรู้ด้วยตนเองโดยผ่านทางประสบการณ์ ซึ่งประสบการณ์เหล่านี้จะกระตุ้นให้ผู้เรียนสร้างโครงสร้างทางปัญญา หรือเรียกว่า สกีมา (Schemas) ผ่านทางประสบการณ์ด้วยวิธีการดูดซึม (Assimilation) และการปรับเปลี่ยน (Accommodation) ซึ่งเชื่อว่า การเรียนรู้เกิดจากการปรับเข้าสู่สภาวะสมดุล (Equilibrium) ระหว่างอินทรีย์และสิ่งแวดล้อม โดยมีกระบวนการ การดูดซึมเข้าสู่โครงสร้างทางปัญญา (Assimilation) เป็นการตีความ หรือรับข้อมูลจากสิ่งแวดล้อมมาปรับเข้ากับโครงสร้างทางปัญญา และการปรับโครงสร้างทางปัญญา (Accommodation) เป็นความสามารถในการปรับโครงสร้างทางปัญญาให้เข้ากับสิ่งแวดล้อม โดยการเชื่อมโยงระหว่างความรู้เดิมและสิ่งที่ต้องเรียนใหม่ และเพียเจต์ (อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2552, หน้า 90) เชื่อว่า คนทุกคนจะมีการพัฒนาเชาว์ปัญญาไปตามลำดับขั้น จากการมีปฏิสัมพันธ์และประสบการณ์กับสิ่งแวดล้อมตามธรรมชาติ และประสบการณ์ที่เกี่ยวกับการคิดเชิงตรรกะและคณิตศาสตร์ (Logic o-mathematical experience)

รวมทั้งการถ่ายทอดความรู้ทางสังคม (Social trans-mission) วุฒิภาวะ (Maturity) และกระบวนการพัฒนาความสมดุล (Equilibration) ของบุคคลนั้น (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2541, หน้า 50 - 59) ซึ่งเพียเจต์ได้แบ่งพัฒนาการออกเป็น 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 ขั้นใช้ประสาทสัมผัส (แรกเกิด ถึง 2 ปี) ขั้นนี้เป็นขั้นของพัฒนาการทางสติปัญญาความคิดก่อนระยะเวลาที่เด็กอ่อนจะพูดและใช้ภาษาได้ เพียเจต์กล่าวว่าสติปัญญาความคิดของเด็กในวัยนี้แสดงออกโดยการกระทำ เด็กสามารถแก้ปัญหาได้แม้ว่าจะไม่สามารถที่จะอธิบายได้

ขั้นที่ 2 ขั้นควบคุมอวัยวะต่างๆ (18 เดือน ถึง 7 ปี) เป็นขั้นที่เชาว์ปัญญาและความคิดของเด็กในวัย 18 เดือนถึง 7 ขวบ ความคิดของเด็กวัยนี้ยังขึ้นอยู่กับการรับรู้เป็นส่วนใหญ่ ไม่สามารถที่จะใช้เหตุผลอย่างลึกซึ้ง แต่เป็นขั้นที่เด็กเริ่มใช้ภาษา สามารถที่จะบอกชื่อสิ่งต่างๆที่อยู่รอบตัวเขาและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของเขา สามารถที่จะเรียนรู้ถึงสัญลักษณ์และใช้สัญลักษณ์ได้ เด็กวัยนี้มักจะเล่นสมมติ เช่น พูดกับตุ๊กตาเหมือนพูดกับคนจริงๆ เด็กวัยนี้มีความตั้งใจทีละอย่างและยังไม่สามารถที่จะเข้าใจว่าสิ่งที่เท่ากันแม้ว่าจะเปลี่ยนรูปร่างหรือแปรสภาพหรือเปลี่ยนที่ว่าง ควรจะยังคงเท่ากันและยังไม่สามารถที่จะเปรียบเทียบสิ่งของมากและน้อย ยาวและสั้น ได้อย่างแท้จริงและมีการยึดตนเองเป็นศูนย์กลาง ไม่สามารถที่จะเข้าใจความคิดของผู้อื่น

ขั้นที่ 3 ขั้นคิดอย่างเป็นรูปธรรม (7 ปี ถึง 11 ปี) พัฒนาการทางเชาว์ปัญญาและความคิดของเด็กระหว่างอายุ 7 ปี ถึง 11 ปี นับว่าเป็นไปอย่างรวดเร็วมาก ในขั้นนี้เพียเจต์ได้เรียกว่า ขั้นคิดเป็นรูปธรรม เด็กในวัยนี้เชาว์ปัญญาที่มีคุณภาพแตกต่างจากเด็กชั้นขั้นที่สอง คือ สามารถที่จะอ้างอิงด้วยเหตุผลและไม่ขึ้นกับการรับรู้จากรูปร่างเท่านั้น เด็กวัยนี้สามารถแบ่งกลุ่มโดยใช้เกณฑ์หลายๆอย่าง และคิดย้อนกลับได้ ความเข้าใจเกี่ยวกับกิจกรรมและความสัมพันธ์ของตัวเลขก็เพิ่มขึ้น

ขั้นที่ 4 ขั้นคิดอย่างเป็นนามธรรม (12 ปี ถึง วัยผู้ใหญ่) ในขั้นนี้พัฒนาการทางเชาว์ปัญญาและความคิดของเด็กเป็นขั้นสุดยอด คือ เด็กในวัยนี้จะเริ่มคิดเป็นผู้ใหญ่ ความคิดแบบเด็กจะสิ้นสุดลง เด็กสามารถที่จะคิดหาเหตุผลนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถที่จะคิดอย่างนักวิทยาศาสตร์ สามารถที่จะตั้งสมมติฐานและทฤษฎีและเห็นว่าความเป็นจริงที่เห็นด้วยกับการรับรู้ไม่สำคัญเท่ากับความคิดถึงสิ่งที่อาจเป็นไปได้ เพียเจต์ ได้สรุปว่า เด็กวัยนี้เป็นผู้ที่คิดเหนือไปกว่าสิ่งปัจจุบัน สนใจที่จะสร้างทฤษฎีเกี่ยวกับทุกสิ่งทุกอย่าง และมีความพอใจที่จะคิดพิจารณาเกี่ยวกับสิ่งที่ไม่มีตัวตน หรือสิ่งที่เป็นนามธรรม

ส่วนทฤษฎีเชิงสังคมวิทยา เป็นทฤษฎีที่มีรากฐานมาจาก วีกอทสกี (Vygotsky) ซึ่งมีแนวคิดที่สำคัญที่ว่า “ปฏิสัมพันธ์ทางสังคมมีบทบาทสำคัญในการพัฒนาด้านปัญญา” รวมทั้งแนวคิดเกี่ยวกับศักยภาพในการพัฒนาด้านพุทธิปัญญาที่อาจมีข้อจำกัดเกี่ยวกับช่องของการพัฒนาที่เรียกว่า Zone of proximal development ถ้าผู้เรียนอยู่ต่ำกว่าโซนดังกล่าวก็จำเป็นที่จะต้องได้รับการ

ช่วยเหลือในการเรียนรู้ที่เรียกว่า Scaffolding และเชื่อว่าผู้เรียนสร้างความรู้โดยผ่านทางการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับผู้อื่น ได้แก่ เด็ก กับผู้ใหญ่ พ่อแม่ ครู และเพื่อน ในขณะที่เด็กอยู่ในบริบทของสังคมและวัฒนธรรม (Sociacultural context) (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2541, หน้า 63-64) วีกอทสกีจะเน้นความสำคัญของวัฒนธรรม นอกจากนี้ วีกอทสกีถือว่าภาษาเป็นเครื่องมือของการคิด และพัฒนาเชาวน์ปัญญาขั้นสูง การใช้เหตุผลและความสามารถในการจำ วีกอทสกีได้แบ่งพัฒนาการทางภาษาเป็น 3 ขั้น ภาษาสังคม (แรกเกิด ถึง 3 ปี) ภาษาที่พูดกันเอง (3 ปี ถึง 7 ปี) และภาษาภายในที่พูดเฉพาะตัว (7 ปีขึ้นไป) วีกอทสกีเชื่อว่าพัฒนาการของภาษาและพัฒนาการความคิดของเด็ก เริ่มด้วยการพัฒนาที่แยกกัน แต่เมื่ออายุมากขึ้น พัฒนาการทั้ง 2 อย่างจะพัฒนาร่วมกัน

วีกอทสกี เน้นความสำคัญของความแตกต่างของบุคคลในการเรียนรู้ บางคนเรียนรู้สิ่งใหม่ได้ด้วยตนเอง บางคนจะเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง บางคนจะเรียนรู้ได้ก็ต่อเมื่อได้รับการชี้แนะหรือความช่วยเหลืออย่างอื่น แต่บางคนจะไม่สามารถที่จะเรียนรู้ได้แม้ว่าได้รับการช่วยเหลือ วีกอทสกีเชื่อว่าการให้ความช่วยเหลือชี้แนะเด็กสำคัญมาก เพราะจะช่วยให้เด็กที่อยู่ในบริเวณความใกล้เคียงพัฒนาเชาว์ปัญญา (Zone of proximal development) ให้สามารถทำงานใหม่ซึ่งเด็กไม่สามารถทำได้ด้วยตนเอง ให้สัมฤทธิผลตามวัตถุประสงค์

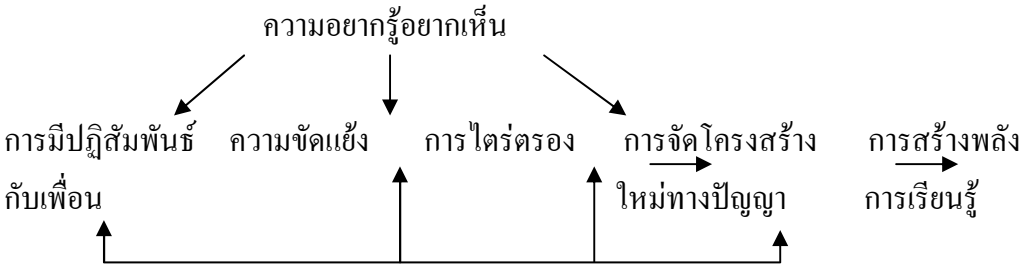
กรอบแนวคิดของทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม (อัมพร ม้าคะนอง, 2546, หน้า 34 – 36)

ทฤษฎีนี้มีกรอบแนวคิดที่สำคัญ ดังนี้

1. ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้ด้วยตนเอง
2. ความรู้และประสบการณ์เดิมเป็นพื้นฐานของการสร้างความรู้ใหม่
3. ปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม เช่น ครูและเพื่อน มีส่วนช่วยในการสร้างความรู้
4. ครูมีบทบาทในการจัดบริบทการเรียนรู้ ตั้งคำถามท้าทายความสามารถ กระตุ้น สนับสนุน และให้ความช่วยเหลือการสร้างความรู้
5. ผู้เรียนเป็นผู้กระตือรือร้นในการเรียน

สมมติฐานของทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม เกี่ยวกับการสร้างความรู้ของผู้เรียน ดังนี้

1. มนุษย์สร้างความรู้ผ่านกิจกรรมการไตร่ตรอง การสื่อสาร และการอภิปราย ซึ่งทำให้พวกเขาสร้างประสบการณ์ในการแก้ปัญหา อันเดอร์ฮิลล์ (Underhill, 1991, p. 121) ใช้โมเดลการเพิ่มพลังการเรียนรู้ของผู้เรียน (Model of learner's empowerment) ดังแผนภาพ ในการอธิบายสมมติฐาน ดังนี้



ภาพประกอบ 2 โมเดลการสร้างพลังการเรียนรู้ (Model of learner's empowerment)

ที่มา : อันเดอร์ฮิลล์ (Underhill, 1991, p. 121)

1.1 ความอยากรู้อยากเห็น (Curiosity) และความขัดแย้ง (Conflict) เป็นกลไกสำคัญในการกระตุ้นให้ผู้เรียนเรียน

1.2 การมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อน (Pear interaction) ก่อให้เกิดความขัดแย้งทางปัญญา (Cognitive conflict)

1.3 ความขัดแย้งทางปัญญานำมาซึ่งการไตร่ตรอง (Reflection)

1.4 การไตร่ตรองกระตุ้นให้เกิดการจัดโครงสร้างใหม่ทางปัญญา (Cognitive restructuring)

1.5 ข้อ 1.1 ถึง 1.4 เกิดเป็นวงจร โดยประสบการณ์ของผู้เรียนมีผลต่อการเกิดของวงจรและวงจรนี้เองที่ทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมและสร้างพลัง (Empowerment) การเรียนรู้ให้กับตนเอง

2. การสร้างความรู้ของผู้เรียนแต่ละคนต่างกัน และต่างจากที่ผู้สอนคาดหวัง ผู้สอนต้องยอมรับและจัดการที่จะสนับสนุนสิ่งที่ผู้เรียนคิด

3. องค์ประกอบสำคัญในการสอน มีดังนี้

การรวบรวมสิ่งที่ผู้เรียนสร้างขึ้นให้เป็นไปในแนวทางที่ถูกต้อง การสร้างแรงจูงใจภายในซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญในการสร้างความรู้ การวิเคราะห์ความคิดผู้เรียนในกระบวนการเรียนการสอน

สรุปได้ว่า แนวคิดสำคัญของทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม มีพื้นฐานจากเพียเจต์และวีกอทสกี ซึ่งมีจุดมุ่งหมายให้ผู้เรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยมีการนำแนวคิดของเพียเจต์และวีกอทสกีมาเป็นกรอบในกระบวนการจัดการเรียนรู้ เริ่มต้นด้วยการสร้างความขัดแย้งทางปัญญา โดยใช้สถานปัญหาเป็นตัวกระตุ้นให้ผู้เรียนตระหนักถึงความขัดแย้งหรือปัญหาที่มี และต้องการแก้ข้อขัดแย้ง

โดยอาศัยภาษาและปฏิสัมพันธ์ทางสังคมเป็นสื่อ โดยมีความรู้และความสามารถเดิมและปฏิสัมพันธ์ทางสังคมเป็นผ่านกิจกรรมต่างๆ เป็นตัวผลักดันให้เกิดการเรียนรู้

2.2 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม

การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม ได้มีนักการศึกษาหลายท่าน นำเสนอหลักการการจัดการเรียนรู้ ไว้อย่างหลากหลายดังต่อไปนี้

ไพจิตร สดวกการ (2539, หน้า 94) ได้อธิบายกระบวนการสอนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาว่ามีหลักการจุดมุ่งหมาย เนื้อหาขั้นตอนการสอนและการวัดและการประเมินผลดังรายละเอียดต่อไปนี้

หลักการแนวการสอนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมเป็นกระบวนการที่เปิดโอกาสให้นักเรียน

1. การเรียนรู้คือการสร้างโครงสร้างทางปัญญา ที่สามารถคลี่คลายสถานการณ์ที่เป็นปัญหาและใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาหรืออธิบายสถานการณ์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้

2. นักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ด้วยวิธีที่ต่าง ๆ กัน โดยอาศัยประสบการณ์เดิม โครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่ ความสนใจ และแรงจูงใจภายในตนเองเป็นจุดเริ่มต้น

3. ครูมีหน้าที่จัดการให้นักเรียนได้ปรับขยายโครงสร้างทางปัญญาของนักเรียนเองภายใต้สมมติฐาน (Assumption) ต่อไปนี้

3.1 สถานการณ์ที่เป็นปัญหา และปฏิสัมพันธ์ทางสังคมก่อให้เกิดความขัดแย้งทางปัญญา

3.2 ความขัดแย้งทางปัญญาเป็นแรงจูงใจให้เกิดกิจกรรมไตร่ตรอง เพื่อขจัดความขัดแย้งนั้น

3.3 การไตร่ตรองบนฐานแห่งประสบการณ์และโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่ และการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม กระตุ้นให้มีการสร้างโครงสร้างใหม่ทางปัญญา

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2545, หน้า 129) ให้หลักการในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติ วิซึม ไว้ดังนี้

1. ความรู้ คือ โครงสร้างทางปัญญาที่บุคคลสร้างขึ้นเพื่อแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เผชิญ

2. ความรู้เกิดจากตัวผู้เรียน ผู้เรียนไม่เป็นผู้ที่มีแต่ความว่างเปล่า แต่ผู้เรียนจะดูดซับสารสนเทศใหม่เข้ากับความรู้เดิมหรือปรับเปลี่ยนสารสนเทศใหม่เข้ากับความรู้เดิม

3. ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความหมายแก่สิ่งที่ได้เรียน โดยการนำมาเชื่อมโยงกับความรู้เดิมหรือประสบการณ์เดิม

4. กิจกรรมการเรียนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ความรู้ ความสามารถตามความเชื่อของตน กิจกรรมการเรียนที่มีลักษณะดังกล่าวจะช่วยฝึกให้สร้างความหมายกับสารสนเทศใหม่ที่ได้รับ

5. การเรียนรู้เป็นกิจกรรมทางสังคมซึ่งเกิดขึ้นโดยการสืบเสาะร่วมกัน การเรียนแบบที่มีความร่วมมือในการสืบเสาะหาความรู้ร่วมกัน จะทำให้ผู้เรียนมีความรู้ลึกซึ้งและกว้างขวางขึ้น เพราะมีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้อื่น และเป็นการขยายทัศนะของตนให้กว้างขึ้น

จุติพร อัศวโสวรรณ, วัฒนา มัคคสมัน, ปรีชา เนาว์เย็นผล และ สุมาลี กาญจนชาตรี (2556, หน้า 92) ได้ให้หลักการในการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการโดยการจัดประสบการณ์ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ไว้ดังนี้

1. ส่งเสริมความคิดหรือกระตุ้นให้ผู้เรียนได้ใช้ความคิดเพื่อบรูณาการความรู้ใหม่ให้เข้ากับความรู้เดิมจัดระเบียบความรู้และปรับความรู้ ความเข้าใจใหม่ให้สมดุล และสร้างความเข้าใจที่ถูกต้อง

2. เน้นการเรียนรู้ด้วยการลงมือกระทำเพื่อสนองความต้องการของผู้เรียน เพราะโดยธรรมชาติของผู้เรียนย่อมมีความอยากรู้อยากเห็น สนใจค้นหาสิ่งที่ตนอยากรู้ เพื่อนำไปสู่การแสวงหาหรือการคาดคะเนคำตอบ และสร้างความเข้าใจด้วยตนเอง

3. เป็นกระบวนการสังคม ที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ทำงานเป็นกลุ่ม

4. ส่งเสริมให้ผู้เรียนนำเสนอผลงานที่สื่อสารความรู้ ความเข้าใจของตนให้ผู้อื่นได้รับรู้

อัมพร ม้าคะนอง (2546, หน้า 39) ให้หลักการในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ไว้ดังนี้

1. การสร้าง หมายถึง การสร้างมโนทัศน์ของสิ่งที่ผู้สอนต้องการให้ผู้เรียนเรียนรู้มากกว่าการสร้าง ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ที่ต้องใช้เวลามากๆ

2. ในการสอนเพื่อให้ผู้เรียนสร้างความรู้ ผู้สอนต้องคำนึงถึงความรู้พื้นฐานที่ผู้เรียนมีเป็นสำคัญ

3. ควรใช้การจัดกิจกรรมช่วยในการสร้างความรู้ เช่น การทำงานกลุ่ม การเรียนแบบร่วมมือ

4. ผู้สอนควรส่งเสริม สนับสนุน ช่วยเหลือ ควบคุม และตั้งคำถาม ในกระบวนการเรียนการสอน

5. ควรให้โอกาสผู้เรียนในการทำกิจกรรม วิเคราะห์ไตร่ตรอง อภิปราย และแสดงความคิดเห็นอย่างสม่ำเสมอ

ไดร์เวอร์และเบล (Driver & Bell) (อ้างถึงใน มันตกานท์ โคตรชาลี, 2545, หน้า 20-21) ได้สรุปการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมว่ามีลักษณะดังนี้

1. ผลลัพธ์ (Outcomes) ของการเรียนรู้ไม่เพียงแต่ขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับความรู้เดิมของผู้เรียนด้วย

2. การเรียนรู้เกี่ยวกับการสร้างความหมาย ผู้เรียนตีความสิ่งต่าง ๆ จากความรู้เดิมที่มีอยู่มากกว่าการรับฟังจากคนอื่น

3. ความหมายที่สร้างขึ้น เมื่อประเมินแล้วอาจเป็นที่ยอมรับหรือไม่เป็นที่ยอมรับก็ได้

4. ผู้เรียนเป็นผู้รับผิดชอบในการเรียนรู้

รูเจนส์ (Rugen, 1997, Website) ให้หลักการในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม โดยสรุปดังนี้

1. เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนแบบสืบเสาะ โดยเลือกปัญหาตามความสนใจ และเกี่ยวข้องกับตนเอง ครูทำหน้าที่กระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความสนใจและเห็นสถานการณ์ปัญหาโดยใช้คำถาม

2. วางโครงสร้างการเรียนรู้จากมโนทัศน์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกัน เพื่อให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของมโนทัศน์เหล่านั้นก่อนที่จะเรียนรู้มโนทัศน์เฉพาะ

เมอร์ฟี (Murphy, 1997, Website) ได้รวบรวมหลักการเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนตามแนวคอนสตรัคติวิซึมของนักการศึกษาต่างๆ โดยสรุปดังนี้

1. พิจารณาความรู้เดิมของนักเรียนประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2. ส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นคว้าด้วยตนเองและเป็นอิสระ โดยใช้แหล่งข้อมูลปฐมภูมิเพื่อยืนยัน สภาพความเป็นจริง

3. ส่งเสริมให้นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ของเรื่องที่เรียน

4. ประเมินผลการเรียนรู้ตามสภาพจริงในขณะดำเนินการเรียนการสอน

จากหลักการในการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมนำไปสู่ขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอนดังต่อไปนี้

ไพจิตร สดวกการ (2539, หน้า 94) ได้สรุปขั้นตอนการสอนไว้ประกอบด้วยขั้นต่าง ๆ ดังนี้

1. สร้างความขัดแย้งทางปัญญา

1.1 ครูเสนอปัญหา A ให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล โดยที่ปัญหา A เป็นปัญหาที่มีความยากในระดับที่นักเรียนต้องปรับโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่เดิม หรือต้องสร้างโครงสร้างทางปัญญาขึ้นใหม่ จึงจะสามารถแก้ปัญหาได้

1.2 จัดนักเรียนเข้ากลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 – 6 คนนักเรียนแต่ละคนเสนอคำตอบและวิธีหาคำตอบของปัญหา A ต่อกลุ่มของตน

2. ดำเนินกิจกรรมไตร่ตรอง

2.1 นักเรียนในกลุ่มย่อยตรวจสอบคำตอบและวิธีหารหาคำตอบของสมาชิกในกลุ่มโดยดำเนินการดังนี้

2.1.1 กลุ่มตรวจสอบคำตอบปัญหา A ของสมาชิกแต่ละคนตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด อภิปราย ซักถามเหตุผลและที่มาของวิธีหาคำตอบ

2.1.2 สมาชิกกลุ่มช่วยกันสร้างสถานการณ์ตัวอย่าง B ที่ง่ายต่อการหาคำตอบในเชิงประจักษ์ และมีโครงสร้างความสัมพันธ์เหมือนกับปัญหา A ตามกำหนดการสร้างการอุปมาอุปไมย ดังนี้

2.1.2.1 ไม่ต้องพิจารณาลักษณะ (Attribute) ของสิ่งเฉพาะแต่ละสิ่งในสถานการณ์ปัญหา A

2.1.2.2 หาความสัมพันธ์ระดับต่ำ (Lower order relations) ระหว่างสิ่งเฉพาะแต่ละสิ่งในสถานการณ์ปัญหา A

2.1.2.3 หาความสัมพันธ์ระหว่างความสัมพันธ์ระดับต่ำ และความสัมพันธ์ระดับสูง (Higher order relations) ซึ่งเป็นระบบความสัมพันธ์ (Systematicity) หรือโครงสร้างความสัมพันธ์ (Relational structure) แล้วถ่ายโยงโครงสร้าง ความสัมพันธ์นี้ไปสร้างสถานการณ์ตัวอย่าง B ที่มีสิ่งเฉพาะแตกต่างกับสถานการณ์ปัญหา A

2.1.3 หาคำตอบของสถานการณ์ตัวอย่าง B ในเชิงประจักษ์

2.1.4 นำวิธีหาคำตอบของปัญหา A มาใช้กับปัญหา B ว่าจะได้คำตอบของปัญหา B ที่หาได้ในเชิงประจักษ์หรือไม่ ถ้าคำตอบที่ได้ไม่ตรงกัน ต้องทำการปรับเปลี่ยนวิธีหาคำตอบใหม่ จนกว่าจะได้วิธีหาคำตอบที่ใช้กับปัญหา B แล้วได้คำตอบสอดคล้องกับคำตอบที่หาได้ในเชิงประจักษ์ ซึ่งอาจมีมากกว่า 1 วิธี

2.1.5 นำวิธีหาคำตอบที่ใช้กับปัญหา B แล้วได้คำตอบสอดคล้องกับคำตอบที่หาได้ในเชิงประจักษ์ ไปใช้กับปัญหา A กลุ่มช่วยกัน ทำให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจการหาคำตอบของปัญหา A ด้วยวิธีดังกล่าวซึ่งอาจมีมากกว่า 1 วิธี

2.1.6 กลุ่มทำการตกลงเลือกวิธีหาคำตอบที่ดีที่สุดตามความเห็นของกลุ่มและช่วยกันทำ ให้สมาชิกของกลุ่มทุกคนมีความพร้อมที่จะเป็นตัวแทนในการนำเสนอ และตอบข้อซักถามเกี่ยวกับวิธีหาคำตอบดังกล่าวต่อกลุ่มใหญ่ได้

2.2 สุ่มตัวแทนกลุ่มย่อยแต่ละกลุ่ม มาเสนอวิธีหาคำตอบของปัญหา A ต่อกลุ่มใหญ่ กลุ่มอื่นๆ เสนอตัวอย่างค้าน (Counter example) หรือหาเหตุผลมาค้านวิธีหาคำตอบที่ยังค้านได้ ถ้าไม่มีนักเรียนกลุ่มใดสามารถเสนอตัวอย่างค้านหรือเหตุผลมาค้านวิธีหาคำตอบที่ยังค้านได้ ครูจึงจะเป็นผู้เสนอเอง วิธีที่ถูกค้านจะตกไป ส่วนวิธีที่ไม่ถูกค้านจะเป็นที่ยอมรับของกลุ่มใหญ่ว่าสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบของปัญหาใดๆ ที่อยู่ในกรอบของโครงสร้างความสัมพันธ์เดียวกันนั้นได้ ตลอดช่วงเวลาที่ยังไม่มีผู้ใดสามารถหาหลักฐานมาค้านได้ ซึ่งอาจมีมากกว่า 1 วิธี

2.3 ครูเสนอวิธีหาคำตอบของปัญหา A ที่ครูเตรียมไว้ต่อกลุ่มใหญ่ เมื่อพบว่าไม่มีกลุ่มใดเสนอในแบบที่ตรงกับวิธีที่ครูเตรียมไว้ ถ้ามีครูก็ไม่ต้องเสนอ

2.4 นักเรียนแต่ละคนสร้างปัญหา C ซึ่งมีโครงสร้างความสัมพันธ์เหมือนกับปัญหา A ตามกฎการสร้างการอุปมา อุปไมยดังกล่าวแล้วและเลือกวิธีหาคำตอบจากวิธีซึ่งเป็นที่ยอมรับของกลุ่มใหญ่แล้ว มาหาคำตอบของปัญหา C

2.5 นักเรียนแต่ละคนเขียนโจทย์ปัญหา C ที่ตนสร้างขึ้นลงในแผ่นกระดาษพร้อมชื่อผู้สร้างปัญหา ส่งครู ครูนำโจทย์ปัญหาของนักเรียนมาคละกันแล้วแจกให้นักเรียนทั้งห้องคนละ 1 แผ่น

2.6 นักเรียนทุกคนหาคำตอบของปัญหาที่ได้รับแจก ด้วยวิธีหาคำตอบที่เลือกมาจากวิธีที่เป็นที่ยอมรับของกลุ่มใหญ่แล้ว ตรวจสอบคำตอบกับเจ้าของปัญหา ถ้าคำตอบขัดแย้งกัน ผู้แก้ปัญหาและเจ้าของปัญหาจะต้องช่วยกันค้นหาจุดที่เป็นต้นเหตุแห่งความขัดแย้ง และช่วยกันขจัดความขัดแย้งนั้น เช่น อาจจะแก้ไขโจทย์ให้รัดกุมขึ้น ให้สมเหตุสมผล หรือแก้ไขวิธีคำนวณและซักถามกันจนเกิดความเข้าใจทั้งสองฝ่ายแล้วจึงนำปัญหา C และวิธีการหาคำตอบทั้งก่อนการแก้ไขและหลังการแก้ไขของทั้งผู้สร้างปัญหาและผู้แก้ปัญหาส่งครู ครูจะเข้าร่วมการตรวจสอบเฉพาะในคู่ที่ไม่สามารถขจัดความขัดแย้งได้เอง

3. สรุปผลการสร้างโครงสร้างใหม่ทางปัญญา

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ กระบวนการคิดคำนวณหรือกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาที่นักเรียนได้ช่วยกันสร้างขึ้นจากกิจกรรมในขั้นตอนที่ 2 ให้นักเรียนบันทึกข้อสรุปไว้

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ (อ้างถึงใน สุวิทย์ มูลคำ, 2545, หน้า 132-135) มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ขั้นปฐมนิเทศ ผู้สอนให้โอกาสผู้เรียนสร้างจุดมุ่งหมายและแรงดลใจในการเรียนรู้ในเนื้อหาที่กำหนด

2. ขั้นทำความเข้าใจ ผู้สอนให้ผู้เรียนปรับแนวคิดปัจจุบันหรือบรรยายความเข้าใจของตนเองในหัวข้อที่กำลังเรียน ซึ่งผู้เรียนแต่ละคนอาจมีแบบจำลองทางความคิดรวบยอดที่อาจจะไม่

สมบูรณ์ในตอนที่เริ่มเรียน โดยผู้เรียนอาจจะทำกิจกรรมที่หลากหลาย เช่น การอภิปรายกลุ่มเล็ก การเขียนผังความคิด การเขียนสรุปความคิด เป็นต้น

3. ขั้นจัดโครงสร้างแนวคิดใหม่ ขั้นจัดโครงสร้างแนวคิดใหม่นี้ เป็นหัวใจสำคัญของการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ประกอบด้วย

3.1 การช่วยผู้เรียนสร้างสรรค์ความรู้ ความเข้าใจใหม่ ตามแนวคิดของการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ก็คือ ผู้สอนช่วยผู้เรียนเกิดความคิดรวบยอดใหม่ หรือการสร้างความคิดรวบยอดที่ยังไม่สมบูรณ์ขึ้นใหม่ตลอดจนขยายไปสู่แบบจำลองทางความคิดรวบยอดของตนเอง โดยผู้สอนต้องมีภาระความรับผิดชอบที่สำคัญคือ การวินิจฉัยความเข้าใจผิดของผู้เรียน ซึ่งสามารถทำได้โดยการสัมภาษณ์ ซักถามผู้เรียนโดยตรง เช่น สัมภาษณ์ผู้เรียนเพื่อค้นหาแบบจำลองความคิดรวบยอดที่ไม่สมบูรณ์ และสร้างแบบจำลองที่สมบูรณ์ขึ้นมาใหม่

3.2 การเขียนแผนผังความคิดรวบยอด แผนผังความคิดรวบยอดเป็นรูปแบบโครงสร้างทางความคิดของผู้เรียนซึ่งดำเนินการได้ดังนี้ ผู้เรียนจัดความคิดรวบยอดของคำลงไปในโครงสร้างหรือจัดทำเป็นหมวดหมู่ระบุความคิดรวบยอดที่ต้องการศึกษาตั้งแต่สองความคิดรวบยอดขึ้นไป สร้างโครงสร้างความรู้ของความคิดรวบยอดและตัวปัญหาที่ต้องการศึกษาเป็นแผนผังความคิดรวบยอด แล้วนำโครงสร้างความรู้ที่ได้มาอภิปรายร่วมกันเป็นกลุ่มและจัดทำเป็นแผนผังความคิดรวบยอดร่วมกัน

3.3 การตรวจสอบความเข้าใจ หลังจากการช่วยให้ผู้เรียนสร้างความคิดรวบยอดใหม่ขึ้นด้วยตนเองแล้วยังต้องมีการตรวจสอบว่าผู้เรียนเข้าใจหรือไม่ โดยอาจพิจารณาจากเกณฑ์ดังต่อไปนี้ ความคิดรวบยอดได้เกิดการเชื่อมประสานระหว่างกันและจัดระเบียบเป็นโครงสร้างความรู้แล้วหรือยัง ความคิดรวบยอดได้รับการเชื่อมโยงเข้าสู่เครือข่ายของปัญหาที่ต้องพิสูจน์หรือยัง และตัวความรู้ความสามารถนำไปใช้ในบริบททางสังคมของโลกแห่งความจริงหรือไม่

4. ขั้นนำแนวความคิดไปใช้ ผู้สอนเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำแนวคิดของตนเองที่สร้างขึ้นไปใช้ในสถานการณ์ต่างๆ ที่หลากหลายทั้งที่คุ้นเคยและแปลกใหม่

5. ขั้นทบทวนหรือเปรียบเทียบความรู้ ผู้สอนเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสะท้อนตนเองว่าแนวคิดของตนได้เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมก่อนเริ่มเรียนรู้อย่างไร โดยอาจจะเขียนหรือวาดภาพเปรียบเทียบระหว่างความคิดตอนเริ่มต้นเรียนรู้ในบทเรียนนั้นกับความคิดตอนสิ้นสุดการเรียนรู้ในบทเรียนนั้น

สุดา เขียงคำ (2546, หน้า 52-54) กล่าวว่า ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึมมี 5 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นนำสู่บทเรียน เป็นขั้นเตรียมความพร้อมของนักเรียนโดยการทบทวนความรู้เดิม

2. ขั้นสอน ประกอบด้วย

2.1 ขั้นเผชิญสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล

2.2 ขั้นกิจกรรมไตร่ตรองระดับกลุ่มย่อย

2.3 เสนอแนวทางแก้ปัญหาต่อทั้งชั้น

3. ขั้นสรุป เป็นการสรุปหลักการและกระบวนการแก้ปัญหา

4. ขั้นฝึกทักษะและการนำไปใช้

5. ขั้นประเมินผล

ไดร์เวอร์และเบล (Driver & Bell) (อ้างถึงใน มันตกานท์ โคตรชาลี, 2545, หน้า 20-21) มีขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอนดังต่อไปนี้

1. ขั้นนำเป็นขั้นที่ผู้เรียนจะรับรู้ถึงจุดมุ่งหมายและแรงจูงใจในการเรียนบทเรียน

2. ขั้นล้วงความคิด เป็นขั้นที่ผู้เรียนแสดงออกถึงความรู้ความเข้าใจเดิมที่มีอยู่เกี่ยวกับเรื่องที่เรียน วิธีการให้ผู้เรียนแสดงออก อาจทำได้โดยการอภิปรายกลุ่ม การให้ผู้เรียนออกแบบโปสเตอร์ หรือการให้ผู้เรียนเขียนเพื่อแสดงความรู้ความเข้าใจที่เขามีอยู่ ขั้นนี้ทำให้เกิดความขัดแย้งทางปัญญา

3. ขั้นปรับเปลี่ยนแนวความคิด นับเป็นขั้นตอนที่สำคัญของบทเรียนแบบการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมด้วยตนเอง ขั้นนี้ประกอบด้วยขั้นตอนย่อยดังนี้

3.1 ทำความกระจ่างและแลกเปลี่ยนความคิด ผู้เรียนจะเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น เมื่อได้พิจารณาความแตกต่างและความขัดแย้งระหว่างความคิดของตนเองกับของคนอื่น

3.2 สร้างความคิดใหม่ จากการอภิปรายและการสาธิต ผู้เรียนจะเห็นแนวทางรูปแบบ วิธีการ ที่หลากหลายในการตีความปรากฏการณ์หรือเหตุการณ์แล้วกำหนดความคิดใหม่

3.3 ประเมินความคิดใหม่ โดยการทดลอง หรือการคิดอย่างลึกซึ้ง ผู้เรียนควรหาแนวทางที่ดีที่สุดในการทดสอบ ในขั้นตอนนี้ผู้เรียนอาจจะรู้สึกไม่พอใจ ความคิด ความเข้าใจที่เคยมีอยู่เนื่องจากหลักฐานการทดลองสนับสนุนแนวคิดใหม่มากกว่า

4. ขั้นนำความคิดไปใช้ เป็นขั้นตอนที่ผู้เรียนมีโอกาสใช้แนวคิด หรือความรู้ความเข้าใจที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ในสถานการณ์ต่าง ๆ ทั้งที่คุ้นเคยไม่คุ้นเคย

5. ขั้นทบทวน เป็นขั้นตอนสุดท้าย ผู้เรียนจะได้ทบทวนว่า ความคิดความเข้าใจของเขาได้เปลี่ยนไป โดยการเปรียบเทียบความคิดเมื่อเริ่มต้นบทเรียนกับความคิดของเขาเมื่อสิ้นสุดบทเรียน ความรู้ที่ผู้เรียนสร้างด้วยตนเองนั้นจะทำให้เกิดโครงสร้างทางปัญญา ปรากฏในช่วงความจำระยะยาว เป็นการเรียนรู้อย่างมีความหมาย ผู้เรียนสามารถจำได้ถาวร

จากข้างต้น ผู้วิจัยจึงสรุปการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม หมายถึง กระบวนการเรียนรู้ที่ผู้สอนจัดสถานการณ์ให้ผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนได้ใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้น มีการตรวจสอบความรู้ใหม่ โดยการตรวจสอบกันเอง ระหว่างกลุ่ม หรือผู้สอนช่วยเหลือในการตรวจสอบความรู้ใหม่ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำสู่บทเรียน เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนเตรียมความพร้อมและทบทวนความรู้เดิม และแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้

ขั้นที่ 2 ขั้นสร้างความรู้ เป็นขั้นที่สร้างสถานการณ์ให้ผู้เรียนเกิดข้อสงสัยอยากรู้ โดยให้ผู้เรียนได้นำความรู้เดิม และประสบการณ์ที่ผ่านมาใช้ในการช่วยแก้สถานการณ์

2.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหาเป็นรายบุคคล เป็นขั้นที่ผู้เรียนได้นำความรู้เดิม และประสบการณ์ที่ผ่านมาใช้ในการช่วยแก้สถานการณ์ปัญหาเป็นรายบุคคล โดยครูอาจมีการใช้คำถามกระตุ้น เพื่อให้ผู้เรียนหาแนวทางคำตอบที่จะเป็นไปได้

2.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม เป็นขั้นที่ผู้เรียนได้ช่วยกันหาแนวทางคำตอบของสถานการณ์ปัญหาเป็นรายกลุ่ม ซึ่งผู้เรียนจะต้องมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น ซักถามอภิปรายกัน จนได้แนวทางคำตอบที่ดีที่สุดของกลุ่ม

2.3 ขั้นแก้ปัญหาร่วมกัน เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอวิธีการหาคำตอบของกลุ่ม และช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง โดยอาจมีครูช่วยอภิปรายและชี้แจงเพิ่มเติม ถ้านักเรียนใช้วิธีที่ยุ่งยากและซับซ้อนเกินไป

ขั้นที่ 3 ขั้นอภิปรายและสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนและครูช่วยกันนำแนวทางในการหาคำตอบที่ช่วยกันทั้งชั้นเรียนมาเป็นข้อสรุป

ขั้นที่ 4 ขั้นนำความรู้ไปใช้ เป็นขั้นที่ผู้เรียนนำความรู้ที่ได้จากการอภิปรายและสรุป มาเป็นแนวทางในการหาคำตอบในสถานการณ์ต่างๆ ทั้งที่คุ้นเคยไม่คุ้นเคย

จุดเด่นและจุดด้อย

จุดเด่นและจุดด้อยของการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม

จุดเด่น คือ ผู้เรียนได้ใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เป็นพื้นฐานในการเชื่อมโยงความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้น จากสถานการณ์ปัญหาที่ผู้สอนได้จัดสถานการณ์ให้ผู้เรียน มีการตรวจสอบความรู้ใหม่ โดยการตรวจสอบกันเอง ระหว่างกลุ่ม หรือผู้สอนช่วยเหลือในการตรวจสอบความรู้ใหม่

จุดด้อย ผู้สอนต้องมีการใช้คำถามในการกระตุ้นความคิดของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้เดิมที่มีอยู่ จะได้เป็นพื้นฐาน แนวทางในการสร้างความรู้ใหม่ อย่างสมเหตุสมผล

2.3 บทบาทครูและบรรยากาศของห้องเรียน

การสอนตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึมนั้น ผู้สอนมีบทบาทแตกต่างจากการสอนแบบดั้งเดิมมาก สเตฟฟี (Steffe) (อ้างถึงใน อัมพร ม้าคะนอง, 2546, หน้า 39) ได้กล่าวถึงบทบาทของผู้สอนในการสอนตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึมว่าผู้สอนควรเรียนรู้ในสิ่งต่อไปนี้

1. การสื่อสารเชิงคณิตศาสตร์กับผู้เรียน
2. การทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์อย่างมีจุดมุ่งหมาย
3. ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนของตนมี
4. การจัดสิ่งแวดล้อมทางคณิตศาสตร์เท่าที่เป็นไปได้
5. ประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนมี
6. ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จะสอนให้ผู้เรียน
7. การส่งเสริมการไตร่ตรองและการได้มาซึ่งความรู้ในบริบทของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์มีจุดมุ่งหมาย
8. การกระตุ้นให้ผู้เรียนสื่อสารเชิงคณิตศาสตร์
9. การทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจและการช่วยให้นักเรียนได้คงทน
10. การสื่อสารกับนักคณิตศาสตร์ศึกษาอื่น ทั้งด้านเนื้อหาและการสอน

จรรยา ภูอุดม (2544, หน้า 40) ได้สรุปบทบาทหน้าที่ของครูตามแนวคอนสตรัคติวิซึมดังนี้

1. เลือกแนวคิดหลักเพื่อนำมาสร้างสถานการณ์ปัญหา
2. นำเสนอสถานการณ์ปัญหา
3. ใช้คำถามท้าทายและกระตุ้นให้เกิดการค้นพบ
4. ช่วยสร้างความชัดเจนในการสื่อสารและนำเสนอศัพท์เทคนิค
5. ทำความเข้าใจและวินิจฉัยความก้าวหน้าของนักเรียน
6. ให้ข้อมูลย้อนกลับ

สรุปได้ว่าบทบาทครูและบรรยากาศของห้องเรียนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม นั้นครูจะต้องเป็นผู้กระตุ้น โดยใช้สถานการณ์ปัญหา ใช้คำถาม จัดประสบการณ์และสิ่งแวดล้อมให้ผู้เรียนอย่างเหมาะสม และเกิดความชัดเจนในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ เพื่อให้เกิดความเข้าใจและค้นพบหนทางด้วยตนเอง

3. การจัดการเรียนรู้แบบปกติ

3.1 ความหมายและแนวทางของการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

การจัดการเรียนรู้แบบปกติ หมายถึง การจัดการเรียนรู้ตามคู่มือของ สสวท. ซึ่งมีการจัดการเรียนรู้ตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542 ยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนสำคัญที่สุด โดยเน้นความสำคัญทั้งสามด้านดังนี้ ด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการ ด้านคุณธรรมจริยธรรมและค่านิยม

แนวทางการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

กระบวนการจัดการเรียนรู้ตามคู่มือของ สสวท. เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือของ สสวท. ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม ก่อนที่จะเรียนเนื้อหาต่อไป เพื่อให้ผู้เรียนมีพื้นฐานพอที่จะเรียนเนื้อหาใหม่

ขั้นที่ 2 สอนเนื้อหาใหม่ โดยเริ่มจากใช้ของจริงผู้เรียนปฏิบัติกิจกรรมโดยใช้ของจริง ใช้รูปภาพประกอบการสอน โดยเปลี่ยนสื่อประกอบกิจกรรม จากของจริงมาเป็นรูปภาพ ใช้สัญลักษณ์หลังจากที่ผู้เรียนปฏิบัติกิจกรรมจากของจริงและรูปภาพ แล้วครูใช้ตัวเลขและเครื่องหมายแทน

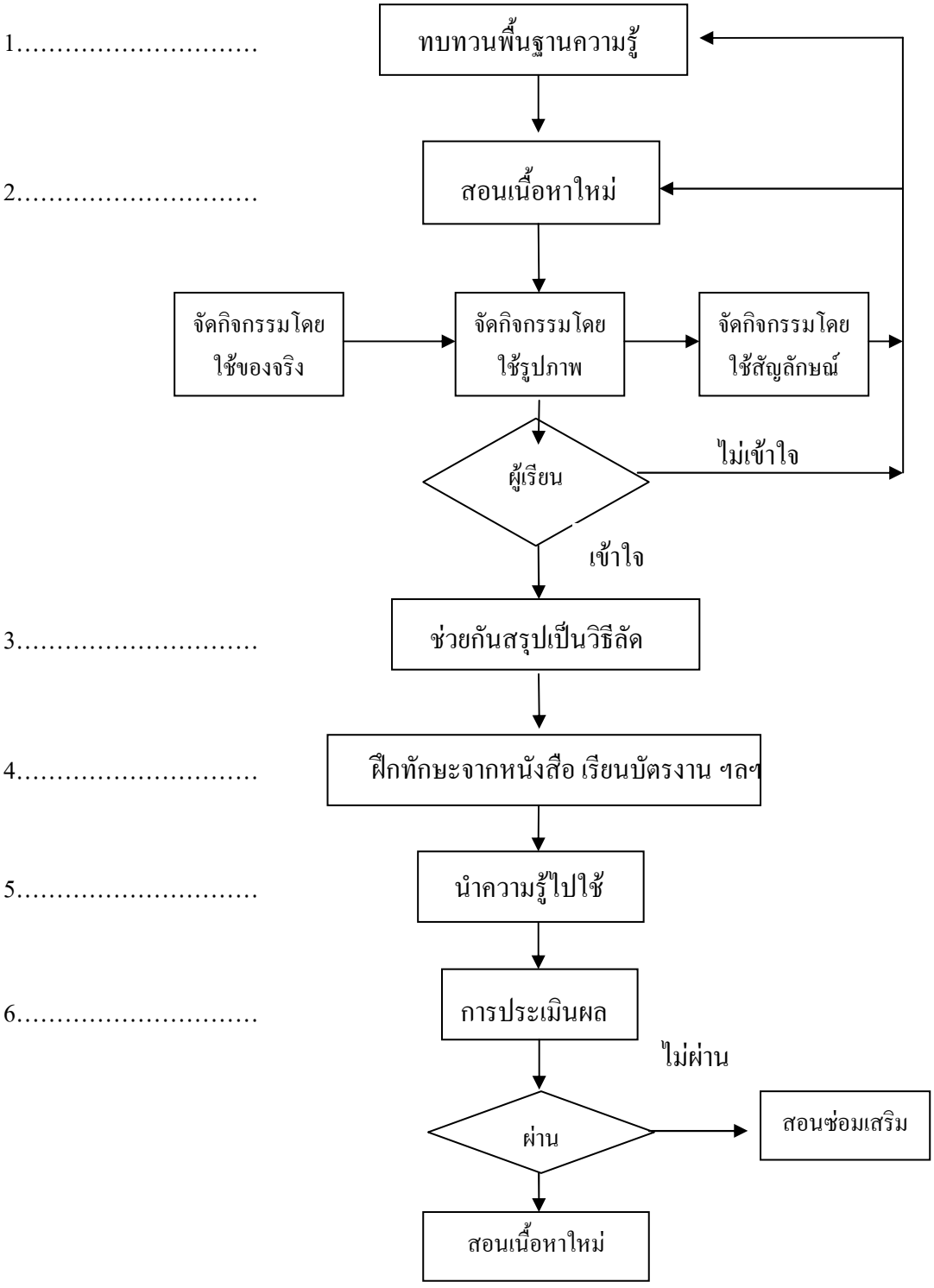
ขั้นที่ 3 ช่วยกันสรุปเป็นวิธีลัด ผู้เรียนทดลองปฏิบัติสังเกต และช่วยกันสรุปความเข้าใจเป็นหลักการความคิดรวบยอด กฎ สูตร หรือวิธีลัด

ขั้นที่ 4 ฝึกทักษะ เมื่อนักเรียนสรุปหลักการความคิดรวบยอด กฎ สูตร หรือวิธีลัดได้แล้ว ผู้เรียนจะฝึกปฏิบัติจากหนังสือเรียน

ขั้นที่ 5 นำความรู้ไปใช้ โดยคาดหวังว่าผู้เรียนจะนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง

ขั้นที่ 6 ประเมินผล เป็นการตรวจสอบเพื่อวินิจฉัยว่า ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้ โดยใช้แบบฝึก ถ้าผู้เรียนทำไม่ได้จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนเรียนเนื้อหาต่อไป

ดังการแสดงขั้นตอนการสอนคณิตศาสตร์ของ สสวท. ในแผนภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 กระบวนการจัดการเรียนรู้

ที่มา : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2557, หน้า 45

ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้ขั้นตอนการจัดกระบวนการเรียนรู้แบบปกติ ตามคู่มือของ สสวท. ซึ่งจะประกอบด้วย 6 ขั้นตอน ขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ ขั้นช่วยกันสรุปเป็นวิธีลัด ขั้นฝึกทักษะ ขั้นนำความรู้ไปใช้ และขั้นประเมินผล

3.2 บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

บทบาทของครูในการจัดการเรียนรู้แบบปกติตามคู่มือของ สสวท. แนวการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ผู้สอนควรคำนึงถึงความสนใจ ความถนัดของผู้เรียนและความแตกต่างของผู้เรียน การจัดสาระการเรียนรู้จึงควรจัดให้มีหลากหลายผู้เรียนสามารถเลือกเรียนได้ ตามความสนใจ รูปแบบการจัดกิจกรรมการสอนควรมีหลากหลายไม่ว่าจะเรียนรู้ร่วมกัน ทั้งชั้นเรียนเป็นกลุ่มย่อย เรียนรายบุคคล สถานที่ที่จัดมีทั้งในห้องเรียน นอกห้องเรียน บริเวณสถานศึกษา มีการจัดให้ผู้เรียนได้ไปศึกษาในแหล่งวิทยาการต่างๆ ที่อยู่ในชุมชนหรือในท้องถิ่น จัดให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชาและความเหมาะสมของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนมีผลการเรียนรู้ได้มาตรฐานตามที่หลักสูตรได้กำหนดไว้ ในการจัดกิจกรรมการเรียนให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเอง ได้ลงมือปฏิบัติจริง ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียน คิดเป็น ทำเป็น รู้จักบูรณาการความรู้ต่างๆ เพื่อให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ รวมถึงการปลูกฝังคุณธรรม ค่านิยม และลักษณะอันพึงประสงค์ ฝึกให้ผู้เรียนรู้จักประเมินผลงานและปรับปรุงงาน ตลอดจนสามารถนำความรู้และประสบการณ์ไปใช้ ในชีวิตและอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุข

4. ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ ทำให้เรามีการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมากมายในทุกวันนี้ ตลอดจนนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้น ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนมีความรู้และมีพื้นฐานเพียงพอที่จะนำไปศึกษาต่อนั้น จำเป็นต้องบูรณาการหรือเชื่อมโยงเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เช่น การนำความรู้เรื่องเซตมาช่วยในการให้บทนิยามของฟังก์ชันในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย การนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นมาช่วยในการเรียนเรื่องจำนวนจริง

การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝนและพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการที่นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ จะส่งเสริมให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งและยาวนานขึ้น

ตลอดจนช่วยให้นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีคุณค่า น่าสนใจ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตจริงได้

เมื่อสภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000, p.64) ได้กล่าวในหนังสือหลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ในปี ค.ศ. 2000 ว่าการเชื่อมโยงต้องเป็นจุดเน้นที่สำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งได้เสนอแนวคิดต่างๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอน การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน ที่เชื่อว่าจะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพดีขึ้น สิ่งนี้ส่งผลให้นักการศึกษาทั่วโลกหันมาสนใจศึกษาการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นของหลักสูตรคณิตศาสตร์ ในการศึกษาเหล่านั้น นักการศึกษาสำคัญหลายคนได้นำเสนอแง่คิดต่างๆ เกี่ยวกับความหมายของการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ และรูปแบบของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพอประมวลได้ดังนี้

4.1 ความหมายของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

รัชนีวรรณ ขันชัยภูมิ (2552, หน้า 22) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะ กระบวนการที่ผู้เรียนควรจะได้เรียนรู้ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้น เพราะการที่ผู้เรียนเห็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ จะส่งเสริมให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ ทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนได้ลึกซึ้งและคงทนมากขึ้นรวมทั้งช่วยให้ผู้เรียนเห็นคุณค่า สนใจเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 34) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการนำความรู้เนื้อหาสาระและหลักการทางคณิตศาสตร์ มาสร้างความสัมพันธ์อย่างเป็นเหตุเป็นผลระหว่างความรู้และทักษะและกระบวนการที่มีเนื้อหาคณิตศาสตร์กับงานที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาและการเรียนรู้แนวคิดใหม่ที่ซับซ้อนหรือสมบูรณ์ขึ้น

วรรณศิริ หลงรัก (2553, หน้า 47) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถในการนำความรู้ เนื้อหาสาระ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับสาระภายในวิชา หรือวิชาอื่นๆหรือชีวิตประจำวัน โดยเชื่อมโยงมโนทัศน์ หลักการ วิธีการทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้ และการดำเนินชีวิตประจำวัน ทำให้ผู้เรียนเกิดความตระหนักในประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1991, p. 102) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงเป็นการผสมผสานแนวคิดที่มีความเกี่ยวข้องกันให้รวมเป็นองค์ประกอบเดียวกัน ซึ่งแบ่งออกเป็น

1. การเชื่อมโยงภายในวิชาเป็นการนำเนื้อหาภายในวิชาเดียวกันไปสัมพันธ์กัน ให้ผู้เรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะไปใช้ในชีวิตจริง ช่วยให้นักเรียนทำความเข้าใจถึงความแตกต่างของเนื้อหาวิชารวมทั้งพีชคณิต เรขาคณิต และตรีโกณมิติ ซึ่งจะทำให้การเรียนของผู้เรียนมีความหมาย

2. การเชื่อมโยงระหว่างวิชาเป็นการรวมศาสตร์ต่างๆ ตั้งแต่ 2 สาขาขึ้นไป ภายใต้หัวเรื่องที่เกี่ยวข้องให้มาสัมพันธ์กัน เช่น วิชาคณิตศาสตร์กับวิชาวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคม กีฬาหรือศิลปะ เป็นการเรียนรู้โดยใช้ความรู้ ความเข้าใจ และทักษะในวิชาต่างๆ มากกว่า 1 วิชาขึ้นไป จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่ลึกซึ้งและตรงกับสภาพชีวิตจริง

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 60) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถของผู้เรียนในการสัมพันธ์ความรู้หรือปัญหาคณิตสาสตร์ที่เรียนมากับความรู้ ปัญหาหรือสถานการณ์อื่นที่ตนเองพบ การเชื่อมโยงความรู้ใหม่กับความรู้เดิม ทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงอาจทำได้หลากหลาย แต่ที่นิยมทำในห้องเรียนคณิตศาสตร์มี 3 ลักษณะดังนี้

1. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น
3. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

สรุปได้ว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถที่ผู้เรียนนำความรู้เนื้อหาสาระ และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสร้างความสัมพันธ์ของเนื้อหาต่างๆในวิชาคณิตศาสตร์ วิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ หรือในชีวิตประจำวัน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย และนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง

จากความหมายดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ดังนี้ ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และหลักการทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่เดิม มาผสมผสานหรือสร้างความสัมพันธ์ให้เกิดความรู้ใหม่ และนำไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือศาสตร์อื่นๆ รวมทั้งสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน

4.2 ความสำคัญของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

คอกซ์ฟอร์ด (Coxford, 1995, p. 3-12) เคนเนดี้ และทิปปส์ (Kennedy and Tipps, 1994, p. 194) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงเป็นกระบวนการที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจะต้องมีความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างความรู้หรือมโนทัศน์ภายในวิชาคณิตศาสตร์ด้วยกันได้ อีกทั้งสามารถเชื่อมโยงบูรณาการความรู้คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือการดำเนินชีวิตในโลกแห่งความเป็นจริงได้

รัชดา ยาตรา (2549, หน้า 34) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์จะช่วยสร้างเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหาภายในวิชาคณิตศาสตร์เอง หรือความสัมพันธ์กับวิชาอื่นๆ รวมทั้งยังมีความเชื่อมโยงกับชีวิตจริง ผู้เรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้เข้าใจมากขึ้นและเห็นความสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์มากขึ้นด้วย

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 60) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงมีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย (Meaningful learning) เนื่องจากการเชื่อมโยงจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ที่เรียนในห้องเรียนได้ดีขึ้น ตลอดจนมองเห็นความสำคัญและคุณค่าของคณิตศาสตร์ในแง่ของการเป็นเครื่องมือที่เป็นประโยชน์ ที่สามารถนำไปใช้กับศาสตร์สาขาอื่นได้ ทำให้คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าสนใจ ไม่ใช่เป็นเพียงวิชาที่เรียนทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม เพื่อใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์เฉพาะในห้องเรียนอีกต่อไปด้วยเหตุผลดังกล่าว ทักษะการเชื่อมโยงจึงถูกเน้นมากในการเรียนการสอนปัจจุบัน

สรุปได้ว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ ทั้งยังให้นักเรียนแสดงความสัมพันธ์กันระหว่างวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อให้เกิดการบรูณาการทางคณิตศาสตร์แล้วจึงพัฒนาการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปวิชาอื่นๆ และนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงเป็นกระบวนการที่สำคัญ เพื่อจะช่วยนักเรียนให้เข้าใจคณิตศาสตร์ ที่เรียนในห้องเรียนได้ดียิ่งขึ้น อีกทั้งยังสามารถเชื่อมโยงบูรณาการความรู้คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และใช้ในการดำเนินชีวิตประจำวันอีกด้วย

4.3 ลักษณะทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

เคนเนดี้ และทิปส์ (Kennedy and Tipps, 1994, pp.194-198) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญ นักเรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรม ได้แก่ รูปภาพ แผนภาพ สัญลักษณ์ และมโนมติ กับกระบวนการรวมเนื้อหา และวิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

การเชื่อมโยงควรสร้างให้เกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอในระหว่างการเรียนการสอน คือ ให้นักเรียนปฏิบัติงานหรือกิจกรรมแล้วแปลงกิจกรรมเหล่านั้น ออกมาเป็นรูปภาพ แผนภาพ แผนภูมิ แผนผัง กราฟและสัญลักษณ์ต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น ในชั้นเรียนเกรด 3 ครูได้สอนให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงระหว่าง “คุกกี้” กับ เศษส่วน ให้นักเรียนในชั้นรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตจริง ด้วยปัญหา “คุกกี้”

การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และกับชีวิตจริง เกิดขึ้นมากมาย ครูสามารถให้นักเรียนปฏิบัติงานที่จะเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ สังคมศึกษา ศิลปะ งานคหกรรม เกี่ยวกับอาหารและกิจกรรมในวิชาต่างๆ

ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงถึงวิธีที่ครูจะสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์ต่าง ๆ และสังคมรอบตัว ด้วยการให้นักเรียนทำโครงงานที่บางโครงงานอาจให้ทำร่วมกันทั้งชั้น รายบุคคล หรือทำโดยกลุ่มย่อย ดังนี้

1. คณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์ เช่น การจดบันทึกอุณหภูมิ ความเร็วลม แรงดันอากาศ การส่งมนุษย์ไปดวงจันทร์ การโคจรของดาวเคราะห์ การกำหนดมาตราส่วน และการสร้างแบบจำลองของระบบสุริยะจักรวาล

2. คณิตศาสตร์กับสังคมศาสตร์ เช่น นาฬิกาน้ำ และนาฬิกาทราย การสร้างพีระมิดในอียิปต์ ศึกษาการออกแบบพรม ถ้วยชาม และตะกร้าที่ใช้หลักการสมมาตร และทรงลูกบาศก์ของชาวอินเดียนแดงทางตะวันตกเฉียงใต้ของสหรัฐ การแยกประเภทของอาชีพต่าง ๆ เป็นอาชีพที่มีเครื่องแบบและไม่มีเครื่องแบบ เช่น นักวิจัย ผู้ให้บริการคนงานโรงงาน ทหาร และปศุสัตว์ การเปรียบเทียบส่วนที่สูงที่สุดและต่ำที่สุด เช่น จุดที่สูงที่สุดของพื้นโลกกับจุดที่ต่ำที่สุดของก้นทะเล

3. คณิตศาสตร์กับศิลปะ เช่น การตัดกระดาษเพื่อติดขอบผนัง การกำหนดมาตรส่วนฉากละครในชั้นเรียน วัดและเตรียมกระดาษสร้างฉาก การวาดภาพทิวทัศน์ต่าง ๆ

4. คณิตศาสตร์กับสุขศึกษา เช่น การวัดความสูงของนักเรียน การบันทึกผลในรูปตารางและกราฟการหาปริมาณแคลอรี่จากการอ่านฉลากข้อมูลโภชนาการข้างกล่องผลิตภัณฑ์ การวัดระดับคอเลสเตอรอล

5. คณิตศาสตร์กับการอ่าน และศิลปะทางภาษา เช่น การหารูปแบบของคำ การแยกประเภทของคำการวิจัยรากศัพท์ของภาษาคณิตศาสตร์ การวิจัยและเขียนเรื่องราวของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียง จำนวน และความงามของตัวเลข การวิเคราะห์ข้อความเพื่อบอกจำนวนพยัญชนะ (เรื่องนี้สามารถเชื่อมโยงกับรายการเกมโชว์ทางโทรทัศน์ของสหรัฐที่ชื่อ Wheel of fortune)

6. คณิตศาสตร์กับการศึกษาทางกายภาพ เช่น การนับจำนวนรอบของการกระโดดเชือก การแสดงให้เห็นว่าโอลิมปิกยิ่งใหญ่ การจัดวางพื้นที่การเล่น การจับเวลาการแข่งขันคณิตศาสตร์กับโลกปัจจุบันเชื่อมโยงกันในหลาย ๆ ด้าน จากบทความในหนังสือพิมพ์หรือนิตยสารไม่ว่าจะเป็นทางด้านธุรกิจ แนวโน้มทางเศรษฐกิจ สภาพอากาศ และข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ การรายงานพิเศษทั้งในรูปบทความ และภาพข่าว แผนผังการเดินทางที่ท่าเรือ สถานีรถไฟ และสนามบินล้วนให้ข้อมูลที่เป็นคณิตศาสตร์ เพื่ออำนวยความสะดวกแก่ผู้คนทั้งสิ้น ปัญหาทางเศรษฐกิจ ปัญหาการ

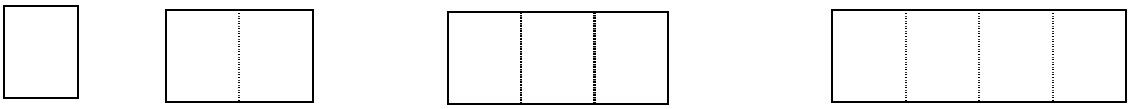
จัดการขยะและมลพิษที่เกิดจากรถยนต์ ของเสียจากโรงงานได้ทำให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับการดำรงชีวิตในปัจจุบัน ครูจึงควรสอนโดยบูรณาการคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ หรือกับปัญหาในชีวิตจริงที่เกิดขึ้นในแต่ละวัน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 35) ได้กล่าวว่ารูปแบบของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์อาจจำแนกตามลักษณะการเชื่อมโยงได้เป็น 2 แบบ ดังนี้

1. การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์ เป็นการนำความรู้และทักษะและกระบวนการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ไปสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผล ทำให้สามารถแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธีหรือกะทัดรัดขึ้นและทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีความหมายสำหรับนักเรียนมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง การเชื่อมโยงสาระจำนวนกับพีชคณิต

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของรูป (รูปที่) กับความยาวรอบรูปตามแบบรูปที่กำหนดให้



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. รูปที่ 50 มีความยาวรอบรูปกี่หน่วย
2. เมื่อ n แทนจำนวนนับจำนวนหนึ่ง รูปที่ n มีความยาวรอบรูปกี่หน่วย
3. รูปที่มีความยาวรอบรูป 30 หน่วย เป็นรูปที่เท่าไร

จากปัญหาข้างต้น ถ้านักเรียนต้องสังเกตแบบรูปของความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของรูป (รูปที่) กับความยาวรอบรูปตามแบบรูปที่กำหนด แล้วใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของจำนวนมาตอบคำถามข้อที่ 1เขียนความยาวรอบรูปในรูปของตัวแปร n เพื่อตอบคำถามข้อที่ 2หลังจากนั้นนักเรียนต้องนำผลข้อที่ 2 มา เขียนเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพื่อนำสมการไปใช้ตอบคำถามข้อที่ 3 ดังนี้

ผลการสังเกตแบบรูปของความสัมพันธ์ระหว่างลำดับของรูป(รูปที่) กับความยาวรอบรูป

รูปที่ 1	ความยาวรอบรูป (หน่วย)
1	$2 + (2 \times 1) = 4$
2	$2 + (2 \times 2) = 6$
3	$2 + (2 \times 3) = 8$
4	$2 + (2 \times 4) = 10$
.	.
.	.
.	.
N	$2 + (2 \times n) = 2 + 2n$

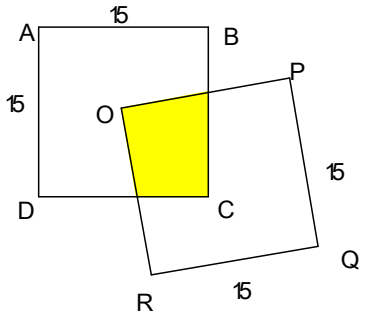
1. รูปที่ 50 หาความยาวรอบรูปได้จาก 2 + (2 * 50)= 102 หน่วย
2. รูปที่ n มีความยาวรอบรูปเป็น 2 + 2n หน่วย
3. รูปที่ 14

แนวคิด 2 + 2n = 30

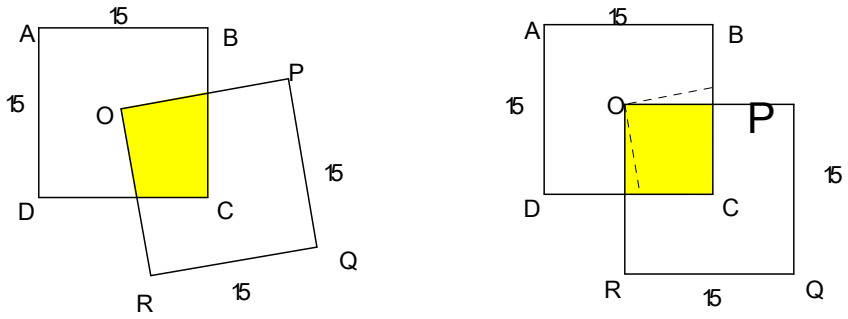
2n = 28

n = 14

ตัวอย่าง การแก้โจทย์ปัญหาโดยนำวิธีการเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิตมาใช้ในการหาพื้นที่พิจารณารูปเรขาคณิต □ ABCD และ □ OPQR แต่ละรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว 15 เซนติเมตร จุด O เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุมของ □ ABCD ดังรูป จงหาพื้นที่ของส่วนที่แรเงา



สำหรับปัญหานี้จะเห็นว่าการหาพื้นที่ของส่วนที่แรเงาโดยตรงไม่สามารถทำได้ เพราะโจทย์ไม่ได้กำหนดความยาวของด้านต่างๆ ของส่วนที่แรเงามาให้ แต่ถ้านำความรู้และวิธีการหมุนรูปเรขาคณิตในสาระการแปลงทางเรขาคณิตมาช่วยจะทำให้สามารถหาพื้นที่ของส่วนที่แรเงาได้ง่าย ดังนี้



รูป ก รูป ข

จากรูป ก. ถ้าหมุน $\overline{OP}$ ตามเข็มนาฬิกาที่จุดหมุน O ให้ $\overline{OP} // \overline{AB}$ จะได้ $\overline{OR} // \overline{BC}$ ลักษณะของรูปที่แรเงาจะเปลี่ยนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เป็น $\frac{1}{4}$ ของพื้นที่ของ $\square$ ABCD ดังรูป ข.

เนื่องจาก พื้นที่ของ $\square$ ABCD เท่ากับ $15 \times 15 = 225$ ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ส่วนที่แรเงาเป็น $\frac{1}{4} \times 225 = 56.23$ ตารางเซนติเมตร

2. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ เป็นการนำความรู้และทักษะและกระบวนการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ไปสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผลกับเนื้อหาและความรู้ของศาสตร์ต่างๆเช่น วิทยาศาสตร์ ดาราศาสตร์ พันธุกรรมศาสตร์ จิตวิทยา และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์น่าสนใจมีความหมาย และนักเรียนเห็นความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญต่อศาสตร์อื่นๆมาตั้งแต่สมัยโบราณ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางวิทยาศาสตร์ จนนักคณิตศาสตร์ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ ถึงกับกล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ (Mathematic is the queen of sciences) นักคณิตศาสตร์หลายคนในอดีตเป็นนักวิทยาศาสตร์ชาวกรีกผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดในยุคโบราณ อาร์คิมีดีสได้เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

มาสร้างสรรค์ผลงานต่างๆทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มากมาย ผลงานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญคือเป็นผู้คำนวณได้ว่า $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ การเขียนแทนจำนวนด้วยเลขยกกำลังและการคำนวณเกี่ยวกับเลขยกกำลังการคำนวณที่เป็นแนวคิดนำสู่สิ่งที่นักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาได้พัฒนาจนเป็นวิชาแคลลูลัส และการคำนวณหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตสองมิติที่ไม่มีสูตรสำเร็จในการคำนวณ ส่วนผลงานทางวิทยาศาสตร์ที่สำคัญคือเป็นผู้คิดค้นหลักการอาร์คิมีดิส (Archimedes' principle) และให้แนวคิดเกี่ยวกับจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุคานและรอกกับการทุ่นแรงและระหัดวิดน้ำแบบสกรูเกลียว

นอกจากในทางวิทยาศาสตร์แล้ว จะเห็นชัดเจนว่ายังมีการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสถาปัตยกรรมศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ ทั้งสถาปนิกและวิศวกรจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์มาช่วยในการออกแบบ คำนวณเกี่ยวกับโครงสร้างหรือชิ้นส่วนต่างๆว่าจะทำงานได้ตามจุดประสงค์ที่กำหนดหรือไม่ในการปฏิบัติงานก็ยังใช้คณิตศาสตร์มาช่วยในการตรวจสอบผลที่ได้เพื่อเฝ้าระวังการทำงานด้วย

ตัวอย่าง ในสถาปัตยกรรมศาสตร์ มีการนำความรู้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ปริมาตร อัตราส่วนทองและการประมาณค่า ไปใช้ในการคำนวณขนาดรูปร่างและทรง จำนวน และการจัดเรียงก้อนหินในการสร้างพีระมิดในอียิปต์ เม็กซิโก และยูคาตัง

พีระมิดกิซ่าที่ยิ่งใหญ่ในประเทศอียิปต์ (The Great Pyramid of Gizeh in Egypt) สร้างเมื่อประมาณ 2600 ปีก่อนคริสต์ศักราช เป็นตัวอย่างของการนำอัตราส่วนทองไปใช้ กล่าวคือ อัตราส่วนระหว่างความยาวของฐานพีระมิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (775.75 ฟุต) ต่อความสูงของพีระมิด (481.4 ฟุต) ประมาณ 1.611

อาคารที่สวยที่สุดในสมัยโบราณ คือ วิหารพาเทนอน (Parthenon) สร้างในสมัยกรีก เมื่อ 447 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ในกรุงเอเธนส์ มีการนำความรู้เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก อัตราส่วนทอง ภาพลวงตา การวัดและสัดส่วน ไปใช้ในการตัดชิ้นส่วน (Module) ที่จะนำมาประกอบเป็นเสาตามต้องการ โดยให้ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 1/3 เท่าของส่วนสูงเสมอ อีกทั้งอัตราส่วนของความยาวของอาคารต่อความสูงของอาคาร เท่ากับ 1.6 : 1 หรืออัตราส่วนของความยาวของอาคารเป็น 1.6 เท่าของความสูงของอาคาร

นอกจากนั้น มหาวิหารโนเทรอดาม (Notre dame) เป็นสถาปัตยกรรมกอธิค (Gothic architecture) ที่นำความรู้คณิตศาสตร์ไปใช้ในการหาจุดศูนย์ถ่วงของหลังคาโค้ง เพื่อให้ถ่ายน้ำหนักมหาศาลของโครงสร้างที่ทำด้วยหินลงสู่พื้นดิน แทนที่จะกระจายน้ำหนักออกไปในแนวนอน

ตัวอย่าง องค์การอนามัยโลก (World Health Organization หรือ WHO) ได้นำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนและเลขยกกำลังไปใช้ในการกำหนด ดัชนีมวลการ (Body Mass Index: BMI) เพื่อบอกภาวะโภชนาการที่ผ่านมาของผู้ใหญ่ที่ความสูงไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงแล้ว

ในการคำนวณหาดัชนีมวลกายใช้สูตร ดังนี้

$$\text{ดัชนีมวลกาย} = \frac{\text{น้ำหนักเป็นกิโลกรัม}}{\left(\text{ความสูงเป็นเมตร}\right)^2}$$

โดยมีรายละเอียดของภาวะโภชนาการ ดังนี้

ดัชนีมวลกาย(BMI)	
ผอม	<18.5
ปกติ	18.5-24.9
อ้วน	25.0-29.9
โรคอ้วน ระดับ 1	30.0-34.9
โรคอ้วน ระดับ 2	35.0-39.9
โรคอ้วน ระดับ 3	> 40.0

ถ้าดัชนีมวลกายเท่ากับหรือมากกว่า 25 แสดงว่า มีโอกาสเสี่ยงต่อการเป็นโรคเรื้อรังและโรคที่เกิดจากความเสี่ยงต่างๆ เช่น ข้อกระดูกเสื่อม โรคเบาหวาน โรคความดันโลหิตสูง โรคหัวใจหลอดเลือดรวมทั้งโรคมะเร็งบางชนิด เช่น มะเร็งเต้านม

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 60 -62) ได้กล่าวว่า การเชื่อมโยงอาจทำได้หลากหลาย แต่ที่นิยมทำในห้องเรียนคณิตศาสตร์มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์ เป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาสาระองค์ความรู้หรือกระบวนการภายในคณิตศาสตร์ เช่น การเชื่อมโยงความรู้เรื่องเส้นจำนวน ระบบพิกัดแกน คู่ลำดับ กราฟ ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

2. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น เป็นการเชื่อมโยงความรู้หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกัน เช่น การเชื่อมโยงความรู้เรื่องสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ กับนาโนเทคโนโลยี และการแบ่งตัวของแบคทีเรีย

3. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน เป็นการเชื่อมโยงความรู้หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับสิ่งที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน เช่น การใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทปีทาโกรัสอธิบายว่าการเดินทางลัดเป็นการเดินในระยะทางที่สั้นกว่าการเดินตามเส้นทางปกติ

ชีลและสวินซัน (Shield & Swinson) (อ้างถึงใน อัมพร ม้าคะนอง, 2554, หน้า 61)ได้นำเสนอเอกสารเชื่อมโยง (Link Sheet) เพื่อใช้เป็นสื่อในการกระตุ้นให้ผู้เรียนเชื่อมโยงมโนทัศน์หรือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายที่ได้เรียนไป และเพื่อสื่อสารความหมายของสิ่งเหล่านั้นให้ผู้อื่นทราบ ชีลและสวินซันใช้เอกสารเชื่อมโยง เมื่อสอนเนื้อหาเฉพาะใดๆ จบ และใช้เป็นเครื่องมือในการวินิจฉัยข้อบกพร่องหรือระดับการพัฒนามโนทัศน์ของผู้เรียน เอกสารเชื่อมโยงที่ชีลและสวินซันสร้างขึ้นประกอบด้วยองค์ประกอบ 4 อย่าง ดังนี้

ตัวอย่างทางคณิตศาสตร์ (Mathematics example)

ตัวอย่างในชีวิตประจำวัน (Everday example)

แผนภาพ/รูปภาพ/กราฟ (Diagram/picture/graph)

คำอธิบายของผู้เรียน (Student explanation)

ตัวอย่างทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนคิดได้อาจเป็นตัวอย่างแทนคำเฉพาะ สัญลักษณ์ หรือขั้นตอนและเป็นสิ่งที่ผู้เรียนจะเขียนในช่องแผนภาพ/รูปภาพ/กราฟ ตัวอย่างในชีวิตประจำวันเป็นสิ่งที่ผู้เรียนแต่ละคนจะสามารถนึกถึงได้ตามประสบการณ์ของตนเอง ส่วนคำอธิบายนั้นเป็นสิ่งที่ผู้เรียนใช้แทนความคิดของตน

เอกสารเชื่อมโยง (Link sheet) มีประโยชน์ในแง่ของการฝึกให้ผู้เรียนคิดวิเคราะห์สิ่งที่ตนเองเข้าใจเพื่อสื่อสารให้ผู้อื่นรับทราบ เอกสารประเภทนี้สามารถใช้ได้หลากหลาย ทั้งกับการสอนทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม คำ สัญลักษณ์ ขั้นตอนหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และจะใช้ในเนื้อหาที่มีปริมาณมากหรือน้อยเพียงใดก็ได้ นอกจากจะมีประโยชน์กับผู้เรียนโดยตรงแล้ว ยังมีประโยชน์กับผู้สอนในการประเมินว่าผู้เรียนเข้าใจสิ่งที่เรียนไปเพียงใด เนื่องจากเอกสารเชื่อมโยงจะบอกถึงระดับความเข้าใจและความสามารถในการนำเนื้อหาไปใช้ เอกสารเชื่อมโยงที่เสนอในที่นี้เป็นเพียงตัวอย่างของการใช้สื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนทำกิจกรรมในชั้นเรียน ผู้สอนคณิตศาสตร์อาจปรับไปใช้โดยเพิ่มองค์ประกอบที่เห็นว่าสำคัญหรือจำเป็นได้

จากข้างต้นสรุปได้ว่าลักษณะของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มีได้หลายลักษณะแต่ที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้มี 3 ลักษณะ

1. การเชื่อมโยงเนื้อหาอื่นๆ ในวิชาคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ

3. การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้

4.4 มาตรฐานของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

เพื่อให้การจัดกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ ได้มีการจัดโปรแกรมการสอนเป็นมาตรฐานหลักสูตรสำหรับครูใช้เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังนี้

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2002, pp. 64-66) ได้กำหนดมาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยงไว้ดังนี้

โปรแกรมการสอนตั้งแต่ชั้นก่อนปฐมวัยถึงเกรด 12 มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. ตระหนัก และรู้จักเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์

การศึกษาคณิตศาสตร์สามารถเชื่อมโยงกันได้ ควรสอดแทรกในการเรียนการสอนในโรงเรียนทุกระดับชั้น การให้ประสบการณ์การเรียนคณิตศาสตร์กับเด็กในครั้งแรกที่เข้ามาในโรงเรียนไม่ควรแยกเรื่องเป็นเรื่องๆ แต่ควรรวมคณิตศาสตร์เข้าหลายเหตุการณ์ ซึ่งเด็กสามารถเรียนรู้ และจดจำรูปแบบของคณิตศาสตร์จากจังหวะดนตรี เพลงที่ร้อง รูปหกเหลี่ยมในรวงผึ้ง จำนวนครั้งที่กระโดด เมื่อขึ้นไปเรียนในระดับเกรด 3-5 กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรเป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น ซึ่งเริ่มเห็นการเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการทางเลขคณิต ตัวอย่างเช่น การคูณเป็นเหมือนการบวกจำนวนที่ซ้ำกัน รู้ว่าการดำเนินการทางคณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ในเหตุการณ์ต่างๆด้วยตนเอง ทั้งเรื่องตรรกยะ สัดส่วน และความสัมพันธ์เชิงเส้น ควรสอดแทรกเข้ามาในกิจกรรมการเรียนการสอนทุกครั้ง ในเกรด 9-12 นักเรียนไม่เพียงต้องรู้ถึงลักษณะของการเชื่อมโยง แต่ต้องสามารถหยั่งรู้ที่จะนำความรู้หนึ่งไปแก้ปัญหาต่างๆ ได้

ตลอดการเรียนตั้งแต่อนุบาลถึงเกรด 12 นักเรียนควรถามตนเองว่า “ปัญหานี้ หรือคณิตศาสตร์เรื่องนี้เหมือนกับปัญหาอื่น หรือเรื่องอื่นที่เคยเรียนมาก่อนหรือไม่ อย่างไร” การเชื่อมโยงเป็นการสร้างแนวคิดใหม่ๆ ขยายเพิ่มเติมจากคณิตศาสตร์ที่เคยเรียนมาแล้ว เรียนรู้ในการเตรียมตัวรับความรู้ใหม่ นักเรียนระดับประถมศึกษารู้จักนำเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกมาโยงเข้ากับการลบ ทศนิยม และเศษส่วน นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นตระหนักและรู้จักวิธีนำเสนอการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่มีแนวคิดเดียวกัน เช่น อัตราส่วนใช้ในการนำเสนออัตราการเปลี่ยนแปลงเพื่อหา ความเอียงหรือความชันของเส้นตรง นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายรู้จักเชื่อมโยงแนวคิดในพีชคณิต และเรขาคณิต

กิจกรรมที่ใช้ในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางและเส้นรอบวงกลม ทำการทดลองโดยนำวงกลมขนาดต่างๆ หลายๆรูป มาวัดความยาวของเส้น

รอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลาง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นอาจจะนำข้อมูลมาเขียนกราฟ 2 ตัวแปร เส้นรอบวง© และเส้นผ่านศูนย์กลาง (d) จะได้แนวเส้นตรงผ่านจุด (0,0) และอัตราส่วนของ c/d จะได้ค่าอยู่ระหว่าง 3.1 และ 3.2 ซึ่งเป็นค่าประมาณของ π ปัญหานี้ได้นำแนวคิดในเรื่องของการวัด การวิเคราะห์ข้อมูลเรขาคณิต พีชคณิต และจำนวนมาใช้

2. เข้าใจคณิตศาสตร์ว่าเชื่อมโยงกันได้อย่างไร และนำความรู้หนึ่งไปสร้างความรู้ใหม่ที่เกี่ยวข้องกันได้

เมื่อนักเรียนสั่งสมประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่โรงเรียนไปเรื่อยๆ ความสามารถในการเห็นส่วนที่สามารถเกี่ยวข้องกันได้ในคณิตศาสตร์ควรมีเพิ่มขึ้น นักเรียนในระดับชั้นอนุบาลถึงเกรด 2 จะตระหนักในเรื่องการนับ รู้จักจำนวน และสัณฐานของวัตถุต่างๆ นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาจะได้ค้นหาการดำเนินการทางเลขคณิตแบบต่างๆ และนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นจะได้ค้นหาตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ รู้จักการสร้างสัดส่วน และความสัมพันธ์เชิงเส้น ส่วนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจะได้ค้นหาการเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์ในเรื่องต่างๆ ดังตัวอย่างพีระมิดสี่เหลี่ยมจตุรัสที่ถูกตัดยอดสามารถนำมาเป็นแนวทางในการหาสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

3. ตระหนักถึงเกรด และรู้จักประยุกต์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

ในการเรียนคณิตศาสตร์ควรได้ทำงานเกี่ยวกับปัญหาในวิชาอื่นๆ บ้าง การเชื่อมโยงสามารถทำได้กับวิชาอื่นๆ ที่เป็นชีวิตประจำวันของนักเรียน ตั้งแต่ระดับอนุบาลถึงเกรด 2 นักเรียนสามารถเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานที่มีเชื่อมโยงกับชีวิตจริง นักเรียนในระดับเกรด 3-5 ควรจะได้เรียนการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ที่สำคัญกับวิชาอื่นๆ และขยายเพิ่มเติมขึ้นไปอีกในระดับเกรด 6-8 และในระดับเกรด 9-12 ควรจะใช้คณิตศาสตร์ไปอธิบายปัญหาที่ประยุกต์ซับซ้อนขึ้น

การให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ด้วยการให้งานถือเป็นเรื่องสำคัญ คณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ในวิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ เภสัชศาสตร์ และบริหารธุรกิจ การเชื่อมต่อคณิตศาสตร์เข้ากับวิทยาศาสตร์ไม่ได้ทำแค่เฉพาะเนื้อหาแต่ยังรวมถึงกระบวนการ และกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ให้เข้ากับการเรียนคณิตศาสตร์ ดังในมาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์แห่งชาติ (National Science Education Standards) ที่ระบุให้ใน 1 ปี โรงเรียนประถมศึกษาจะต้องสอนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง อากาศ โดยนำคณิตศาสตร์มาเชื่อมโยงกับกิจกรรมการสอนนี้ซึ่งสามารถทำได้หลากหลาย เช่น นักเรียนอาจจะออกแบบเครื่องมือ หรืออุปกรณ์วัดสภาพอากาศวางแผนการจัดการ และการสื่อสารข้อมูลเป็นต้น

ตัวอย่างของการประยุกต์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ เป็นเรื่องที่นักเรียนในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแห่งหนึ่งได้ไปฝึกงานที่บริษัทผลิตยาแห่งหนึ่ง ซึ่งกำลังขยายงานด้วย

การตั้งสาขาใหม่ จากข้อมูลที่ทราบทางบริษัทไม่ได้คำนึงแต่เฉพาะยอดขายที่จะได้ในอนาคตในการหาทำเลที่ตั้งร้านเท่านั้น ทีมงานของนักเรียนได้รับความช่วยเหลือให้คำปรึกษาจากผู้เชี่ยวชาญด้านการบริหารของบริษัท นักเรียนได้ทำการวิเคราะห์สถิติข้อมูลประชากรและข้อมูลทางเศรษฐกิจที่ทำให้เราทราบถึงอุปสงค์ทางการตลาด นักเรียนได้ทำงานกับพนักงานของบริษัทและร่วมประเมินความเป็นไปได้ของทำเลที่ตั้งสาขาใหม่ นักเรียนได้ทำงานกับสถาปนิกในการออกแบบตัวร้าน และทำงานร่วมกับพนักงานบัญชีในการวางแผนในเรื่องการเงิน

โทมัส และซานเทียโก (Thomas & Santiago, 2002, p. 484) กล่าวถึงมาตรฐานการเชื่อมโยงปี ค.ศ. 1989 และ ค.ศ.2000 ว่า ในปี ค.ศ.1989 มาตรฐานหลักสูตรและการประเมินผลมาตรฐานการเชื่อมโยงได้กำหนดไว้อย่างมีความหมายเป็น 1 ใน 4 ของมาตรฐานด้านกระบวนการที่เชื่อมต่อเนื่องกัน เพื่อการผ่านระดับช่วงชั้นทั้งหมด

แต่ละกลุ่มระดับอนุบาล-เกรด 4, เกรด 5-เกรด 8 และเกรด 9-เกรด 12 ลักษณะเฉพาะของหลักสูตรจะส่งเสริมให้การเชื่อมโยงในคณิตศาสตร์เป็นการพิสูจน์ว่าระดับช่วงชั้นที่เพิ่มขึ้นจะเพิ่มความลึกซึ้งในการสร้างการเชื่อมโยงให้มากขึ้น

ในระดับอนุบาลถึงเกรด 4 เน้นการกำหนดนึกถึงความสัมพันธ์ สร้างการเชื่อมโยงในคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยให้พวกเขาเห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างความคิดในวิชาคณิตศาสตร์ ในเกรด 5-8 การสังเกตการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์เป็นการเน้นถึงจุดมุ่งหมายอย่างกว้างๆ ของนักเรียน เทคนิคการเขียนภาพให้ได้สัดส่วนอย่างที่เห็นด้วยตาจริงในวิชาคณิตศาสตร์เหมือนกับการรวบรวมสิ่งทั้งหมด หลักสูตรที่สนับสนุนนักเรียนในเกรด 9-12 มีความสำคัญต่อการสืบสวนของการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ ต่อไปถึงการรวบรวมความสนใจในความสัมพันธ์ระหว่างหัวข้อคณิตศาสตร์และการประยุกต์

หลักการและมาตรฐานชั้นสูง มาตรฐานการเชื่อมโยงตลอดจนหลักสูตร เป็นตัวบ่งชี้ที่มากกว่าการเข้าใจ (หยั่งรู้) จุดความสนใจ และการเชื่อมโยงกันเป็น 1 ใน 5 ของมาตรฐานด้านกระบวนการ มาตรฐานการเชื่อมโยงนิยามอย่างชัดเจน เป็น 1 ในกลุ่มของเกณฑ์สำหรับนักเรียนระดับอนุบาล-เกรด 12 ในแผนการเรียนรู้

แผนการเรียนรู้จากระดับอนุบาล-เกรด 12 ควรจะทำให้นักเรียนสามารถ

1. ตระหนัก และรู้จักเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์
2. เข้าใจถึงความคิดทางคณิตศาสตร์ว่ามีการเชื่อมโยงอย่างไร และสร้างความคิดเพื่อสร้างการเชื่อมโยงทั้งหมดเข้าด้วยกัน
3. ตระหนัก และรู้จักประยุกต์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

กระทรวงศึกษาธิการ (2544, หน้า 23) ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ด้านทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไว้ในมาตรฐาน ค 6.1 คือ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

มาตรฐานการเรียนรู้ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ด้านทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 คือ เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า มาตรฐานของทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มุ่งเน้นให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน สามารถนำความรู้ที่ได้รับไปสร้างความรู้ใหม่ นำความรู้ไปใช้ในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับที่สูงขึ้น นำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์อื่นๆ และในชีวิตประจำวันได้

4.5 แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 37-38) กล่าวว่า นอกจากการเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาต่างๆ ในคณิตศาสตร์ด้วยกันแล้ว ยังต้องมีการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ โดยใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และแก้ปัญหา เช่น การนำความรู้เรื่องเลขยกกำลังและผลบวกของอนุกรมมาช่วยในการคิดดอกเบี้ยทบต้น การนำความรู้เรื่องเรขาคณิตมาช่วยในงานศิลปะและการออกแบบลวดลายต่างๆ การนำความรู้เรื่องวงรีมาช่วยในการออกแบบเครื่องสลายนิ่วในวงการแพทย์

นอกจากนั้นแล้วยังมีการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับชีวิตความเป็นอยู่ประจำวันอีก เช่น การซื้อขาย การชั่งตวงวัด การคำนวณระยะทางและเวลาที่ใช้ในการเดินทาง การวางแผนในการออมเงินพร้อมผลประโยชน์ที่อาจได้รับ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2557, หน้า 16-17) กล่าวว่า การพัฒนาทักษะ/กระบวนการในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ มีดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อย่างเด่นชัดในเรื่องนั้น
2. มีความรู้ในเนื้อหาที่จะนำไปเชื่อมโยงกับสถานการณ์หรืองานอื่นที่ต้องการเป็นอย่างดี
3. มีทักษะในการมองเห็นเกี่ยวข้องกับการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ ทักษะ/กระบวนการที่มีเนื้อหานั้นกับงานที่เกี่ยวข้อง

4. มีทักษะในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างความสัมพันธ์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่ต้องเกี่ยวข้อง

5. มีความเข้าใจในการแปลความหมายของคำตอบที่หาได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่ามีความเป็นไปได้หรือสอดคล้องกับสถานการณ์นั้นอย่างสมเหตุสมผล

ในการจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะ/กระบวนการในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ ผู้สอนอาจจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ปัญหาสอดแทรกในการเรียนรู้อยู่เสมอ เพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นกระบวนการคณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้สอนอาจกำหนดขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงของคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ หรือเห็นการนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน

เพื่อให้ผู้เรียนได้มีการปฏิบัติจริง และมีทักษะกระบวนการในการเชื่อมโยงความรู้ ผู้สอนอาจมอบหมายงานหรือกิจกรรมให้ผู้เรียนไปศึกษาค้นคว้าหาความรู้ที่เกี่ยวข้องกับกิจกรรมนั้น แล้วนำเสนองานต่อผู้สอนและผู้เรียนอื่น เพื่อให้มีการอภิปรายและหาข้อสรุปร่วมกัน

ตัวอย่าง กำหนดสถานการณ์ปัญหา ดังนี้

นมสดปริมาตรสุทธิ 830 มล. ราคาขวดละ 33 บาท นมสดปริมาตรสุทธิ 250 มล. ราคากล่องละ 10 บาท ถ้าต้องการซื้อนม 4 ลิตร ควรเลือกซื้อนมขนาดใดเพราะเหตุใด

จากสถานการณ์ปัญหาข้างต้นนี้จะเห็นว่า ผู้เรียนต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของหน่วยการตวง และการคิดคำนวณต้องคำนึงถึงปริมาตรของนมและราคา ต้องใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจในการเลือกซื้อ การนำเสนอเฉพาะคำตอบไม่ใช่สิ่งสำคัญ ผู้สอนจะต้องให้ความสำคัญต่อแนวคิดและเหตุผลของผู้เรียนแต่ละคนประกอบด้วย

ตัวอย่างคำตอบและเหตุผลของผู้เรียน อาจมีดังนี้

ด.ช.ก่อ ตอบว่า ควรเลือกซื้อนมกล่อง เพราะนมกล่องปริมาตรสุทธิ 250 มล. จำนวน 4 กล่อง เท่ากับ 1,000 มล. ซึ่งเท่ากับ 1 ลิตร พอดี ดังนั้น ถ้าต้องการนม 4 ลิตร จะต้องซื้อ $4 \times 4 = 16$ กล่อง และต้องจ่ายเงิน $16 \times 10 = 160$ บาท แต่ถ้าเลือกซื้อนมขวดต้องซื้อนม 5 ขวด ซึ่ง จะได้นม $5 \times 830 = 4,150$ มล. ทำให้ได้นมมากกว่าที่ต้องการ 150 มล. โดยจ่ายเงิน $5 \times 33 = 165$ บาท ซึ่งมากกว่าซื้อนมกล่อง 5 บาท

ผู้สอนอาจเปิดประเด็นให้ผู้เรียนได้มีการอภิปรายต่อไปในเรื่องนี้ได้อีกในประเด็นที่ว่าในชีวิตจริงก่อนตัดสินใจซื้อสิ่งของใด ผู้ซื้อจะไม่พิจารณาเฉพาะราคาที่ต้องจ่ายอย่างเดียว ต้องพิจารณาองค์ประกอบอื่นๆด้วย เช่น ความสะดวกในการใช้ การเก็บรักษา คุณภาพของสิ่งของและอื่นๆ ประเด็นเหล่านี้จะช่วยทำให้ผู้เรียนมีความคิดพิจารณาในวงกว้างขึ้น สามารถนำความคิดเช่นนี้ไปประยุกต์ในชีวิตจริงได้ เป็นการส่งเสริมทักษะ/กระบวนการในการให้เหตุผล ความคิด

สร้างสรรค์ ส่งเสริมด้านคุณธรรมจริยธรรมและค่านิยม ในด้านความคิดอย่างถี่ถ้วนรอบคอบ กล้าแสดงความคิดเห็น และคิดอย่างมีวิจารณญาณอีกด้วย

ในการจัดการเรียนรู้ที่ต้องการให้ผู้เรียนมีการพัฒนาการเรียนรู้ ผู้สอนควรจัดกิจกรรมหรือให้ปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิด สามารถบอกแนวคิดและแสดงเหตุผลได้ คำตอบที่หาได้อาจมีมากกว่า 1 คำตอบ ขึ้นอยู่กับการให้เหตุผลประกอบที่สมเหตุสมผลด้วย ผู้สอนไม่ควรดูเฉพาะคำตอบเท่านั้น

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 61-63) กล่าวว่าสิ่งสำคัญที่จะทำให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงได้คือ ผู้เรียนต้องมีความรู้และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องที่จะนำไปใช้เชื่อมโยงเป็นอย่างดี มีประสบการณ์ในการมองเห็นความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันของสิ่งที่จะเชื่อมโยง และมีทักษะในการเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงจึงไม่ควรแยกเนื้อหาที่สัมพันธ์กันออกจากกัน แต่ควรสอนร่วมกันไป เช่น สอนทั้งจำนวนและการดำเนินการ พีชคณิต เรขาคณิต เพื่อให้ผู้เรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกัน และสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ อันจะทำให้เข้าใจภาพรวมของคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น ผู้สอนต้องตระหนักถึงประเด็นนี้ และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน

การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงอาจเริ่มต้นง่ายๆ จากการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์ โดยเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนเคยเรียนรู้มาแล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การสอนเรื่องจำนวนเริ่มตั้งแต่ระดับประถมศึกษา ที่มักเริ่มด้วยการนับสิ่งของ การจดจำและเขียนสัญลักษณ์ของจำนวนนับ จากนั้น ผู้เรียนจะเรียนรู้มโนทัศน์เบื้องต้นของเศษส่วนและทศนิยมและในระดับมัธยมศึกษา จะมีการสอนมโนทัศน์เรื่องจำนวนประเภทต่างๆ อีกครั้ง โดยรวมจำนวนเต็มลบและศูนย์ เช่น จำนวนนับ (Counting numbers) หรือจำนวนธรรมชาติ (Natural numbers) จำนวนเต็มบวก (Positive integers) จำนวนเต็มลบ (Negative integers) ศูนย์ (Zero) เศษส่วน (Fractions) ทศนิยม (Decimals) จำนวนตรรกยะ (Rational numbers) จำนวนอตรรกยะ (Irrational numbers) จนกระทั่งถึงมัธยมศึกษาตอนปลาย ผู้เรียนจะได้เรียนระบบจำนวน รวมถึงมโนทัศน์ที่เป็นนามธรรมของจำนวนจริง (Real numbers) และจำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) ผู้สอนควรเชื่อมโยงให้ผู้เรียนเห็นโครงสร้างและความสัมพันธ์กันของจำนวนเหล่านี้ เพื่อจะทำให้ผู้เรียนมีมโนภาพที่ดีในเรื่องของจำนวน ซึ่งจะมีผลต่อการใช้งานของคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 77-83) การใช้คำถามเป็นปัจจัยสำคัญในการพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ โดยผู้สอนต้องพิจารณาสิ่งที่เกี่ยวข้องในหลายประเด็น เช่น ความสามารถของผู้เรียนที่จะตอบคำถาม สถานการณ์เฉพาะที่กำลังเกิดขึ้นในห้องเรียน ประโยชน์ที่จะเกิดจากการถามและตอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ตัวอย่างคำถามที่ต้องการพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง

ทางคณิตศาสตร์ ต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้างในการแก้ปัญหานี้ เราใช้ความรู้เรื่องนี้ในชีวิตประจำวันอย่างไรบ้างลองยกตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน เรื่อง...ที่เรียนอยู่นี้ เกี่ยวข้องกับเรื่อง...ที่เรียนมาก่อนหน้านี้อย่างไร ข่าวเรื่อง...ที่กำลังเป็นประเด็นอยู่ขณะนี้ เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร โดยมีจุดประสงค์ของการถามเพื่อให้ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ระหว่างเรื่องที่เกี่ยวข้องกัน เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับเรื่องใกล้ตัว

จากที่กล่าวมาสรุปได้ดังนี้ แนวทางในการจัดการเรียนรู้ที่เป็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียนได้มีโอกาสคิดเชื่อมโยง โดยกำหนดสถานการณ์ที่หลากหลายซึ่งเชื่อมโยง คณิตศาสตร์เข้ากับศาสตร์อื่นๆ และเชื่อมโยงในชีวิตประจำวัน เพื่อให้ผู้เรียนได้นำความรู้ เนื้อหาสาระและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้สถานการณ์ที่ครูผู้สอนกำหนดขึ้น และให้นักเรียนร่วมกันทำงานเป็นกลุ่ม เพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนแนวคิด แสดงความคิดเห็นของปัญหาร่วมกัน

4.6 การวัดค่าทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2557, หน้า 146)

ตาราง 1 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ปรากฏให้เห็น
4 ดีมาก	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์/ สาระอื่น/ ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา หรือประยุกต์ใช้ได้อย่างสอดคล้องและเหมาะสม
3 ดี	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์ / สาระอื่น / ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา หรือประยุกต์ใช้ได้บางส่วน
2 พอใช้	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์ได้บางส่วน
1 ต้องปรับปรุง	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงยังไม่เหมาะสม
0 ไม่พยายาม	ไม่มีการเชื่อมโยงกับสาระอื่นใด

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 181-182) กล่าวว่า การประเมินการเชื่อมโยงนั้น ส่วนใหญ่ประเมินการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์ และระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน ซึ่งมักจะเกี่ยวข้องกับการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริง

ตัวอย่างการประเมินการเชื่อมโยง

1. ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างการวัดความยาว การวัดพื้นที่ การวัดปริมาตร การวัดน้ำหนัก ที่ตนใช้ในชีวิตประจำวันมาอย่างละ 2 ตัวอย่าง พร้อมทั้งระบุหน่วยการวัดของทุกตัวอย่าง

2. ผู้สอนให้ผู้เรียนทำงานเป็นกลุ่มโดยใช้แผนที่ประเทศไทยและอุปกรณ์อื่น เช่น ไม้บรรทัด ดินสอ ในการใช้ความรู้เรื่องทิศ มาตราส่วน อัตราส่วน หาทิศและระยะทางที่จังหวัดสำคัญต่างๆ อยู่ห่างจากกรุงเทพฯ รวมทั้งคำนวณเวลาที่จะใช้ในการเดินทาง โดยให้ผู้เรียนกำหนดความเร็วในการเดินทางตามความเหมาะสม

ตัวอย่างการประเมินข้างต้น ผู้สอนจะเห็นความสามารถของผู้เรียนในการเชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ย่อยๆ ที่เรียนเป็นเรื่องๆ แยกจากกัน เข้าด้วยกัน และเมื่อจะนำไปใช้งาน ผู้เรียนจะต้องประมวลความรู้ในเรื่องที่เกี่ยวข้องมาใช้ให้เหมาะสมกับสถานการณ์

5. ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ เนื้อหาความรู้ส่วนใหญ่เป็นนามธรรมที่ต้องใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (เช่น ตาราง กราฟ สมการ อสมการ ฟังก์ชันต่างๆหรือแบบจำลอง)เข้ามาช่วยสื่อความหมายและนำเสนอให้ความรู้นั้นมีความกะทัดรัดและชัดเจน เช่น

ใช้สัญลักษณ์ π แทนอัตราส่วนของความยาวของเส้นรอบวงกลมต่อความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเดียวกัน ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะที่เท่ากับ 3.141592653589793238462....

ใช้สมการ $y = 5x + 1$ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y

ใช้กราฟแท่งหรือแผนภูมิรูปวงกลม เพื่อนำเสนอข้อมูลต่างๆ

ใช้สัญลักษณ์ f(x) แทน ค่าของฟังก์ชันตัวแปร x ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดของ f

เมื่อต้องแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนไม่เพียงจะต้องอ่านเพื่อทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาและค้นหาคำตอบ แต่ยังต้องพูดหรือเขียนเพื่ออธิบายความรู้ความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ผลการวิเคราะห์จากแบบรูป การนำเสนอข้อความคาดการณ์ ตลอดจนการแสดงวิธีทำและการให้เหตุผลโดยใช้ข้อความ สัญลักษณ์ ตัวแปร สมการ ตาราง กราฟ ตัวแบบหรือจำลองหรือตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ มาช่วยในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

5.1 ความหมายการสื่อสาร

การสื่อสาร (Communication) มีรากศัพท์มาจากภาษาลาติน “Communius” หรือ “Common” หมายถึง “พร้อมกัน” หรือ “ร่วมกัน” ซึ่งหมายความว่า เมื่อเกิดการสื่อสารขึ้นคนเราพยายามที่จะสร้างความพร้อมกันหรือ มีส่วนร่วมกัน โดยใช้กระบวนการในการถ่ายทอดและแลกเปลี่ยนข่าวสารความคิด ทัศนคติ จากบุคคลหนึ่งไปยังอีกบุคคลหนึ่ง เพื่อสร้างความเข้าใจร่วมกัน (พูนศรี อาภรณ์รัตน์, 2548, หน้า 59)

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 72) กล่าวว่า การสื่อสาร (Communication) เป็นกระบวนการถ่ายทอดข่าวสารจากผู้ส่งสารไปยังผู้รับสาร โดยนำเสนอผ่านช่องทางการสื่อสารต่างๆ ได้แก่ การฟัง การพูด การอ่าน การเขียน การดู และการเสดง ท่าทาง โดยอาจไม่ใช้สื่อ หรือใช้สื่อสิ่งต่างๆ เช่น วิทยุ โทรทัศน์ หนังสือพิมพ์ วารสารหรือสิ่งพิมพ์ต่างๆและอินเตอร์เน็ต

การสื่อสารที่ผ่านช่องทางการสื่อสารดังกล่าวข้างต้นจะมีประสิทธิภาพ ถ้าการสื่อสารนั้นมีจุดมุ่งหมายเนื้อหาของข่าวสาร และรูปแบบของการสื่อสารที่ถูกต้องชัดเจน ตลอดจนผู้รับสารมีเจตนาที่รับข่าวสารและมีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ซึ่งกันและกัน ซึ่งเนื้อหาของข่าวสารอาจเป็นความรู้ แนวคิด ความคิดเห็น อารมณ์ เจตคติ ความเชื่อ หรือกระบวนการก็ได้ และควรสื่อสารหรือนำเสนอเนื้อหาเหล่านั้นผ่านช่องทางการสื่อสารที่เหมาะสมกับสถานการณ์ ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายของการสื่อสารนั้นๆ

โดยทั่วไป ในการสื่อสารนั้นจะเป็นการง่ายสำหรับนักเรียนที่จะอยู่ในฐานะผู้รับสารมากกว่าจะอยู่ในฐานะของผู้ส่งสาร และในภาวะปกติแล้วการรับสารด้วยการฟังและการดูจะง่ายกว่าการรับสารด้วยการอ่าน สำหรับนักเรียนไทยหลายคนการให้เป็นผู้ส่งสาร ไม่ว่าจะเป็นการพูด การเขียนหรือการแสดงท่าทางก็จะเป็นเรื่องที่ยากลำบากและทำไม่ได้ดี ทั้งนี้ เพราะไม่ได้มีการฝึกและปฏิบัติกันทั้งในและนอกห้องเรียนอย่างเพียงพอโดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ เราจึงมักพบว่ามีนักเรียนที่อ้างว่าคิดแก้ปัญหาได้ หาเหตุผลได้ แต่ไม่สามารถอธิบายหรือเขียนแสดงออกมาได้ ดังนั้น จึงเป็นหน้าที่ของครูที่ต้องช่วยกันคิดแก้ปัญหาด้านการสื่อสารนี้ต่อไปด้วย

กล่าวโดยสรุป การสื่อสาร หมายถึง กระบวนการถ่ายทอด แลกเปลี่ยนข้อมูลข่าวสาร จากบุคคลหนึ่งไปยังบุคคลหนึ่ง โดยผ่านกระบวนการสื่อสารต่างๆ เพื่อให้เกิดความเข้าใจซึ่งกันและกัน

5.2 ความหมายทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2544, หน้า 198) ได้กล่าวว่า การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการเขียนปัญหาในรูปแบบของตาราง กราฟ หรือข้อความ เพื่อสื่อสารความสัมพันธ์ของจำนวนเหล่านั้น โดยขั้นตอนในการดำเนินการเริ่มจากการ

กำหนดโจทย์ปัญหาให้ผู้เรียนวิเคราะห์ กำหนดตัวแปร เขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรในรูปของสมการหรืออสมการตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด และดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการทางพีชคณิต

อลิสรา ชมชื่น (2550, หน้า 49-50) กล่าวว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถของนักเรียนในการใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงและทำความเข้าใจแนวคิด เป็นการผสมผสานความรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความเข้าใจของตนเอง โดยนักเรียนจะเข้าใจความคิดของตนเองอย่างลึกซึ้งเมื่อนักเรียนได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาของตนเองได้พิสูจน์ความมีเหตุผลของตนเองต่อคนอื่น หรือเมื่อนักเรียนได้ตั้งโจทย์หรือคำถาม ด้วยวิธีการสื่อสารที่หลากหลาย เช่น การเขียน การฟัง การพูด ต่อมาในปี ค.ศ. 2000 NCTM (60-62) ได้แยกการใช้สัญลักษณ์และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เพื่อสื่อแนวคิดออกเป็นการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการสื่อสารจึงเป็นวิธีการแลกเปลี่ยนแนวคิดและการทำความเข้าใจให้กระจ่างชัดเจน

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989, p. 214) ได้กล่าวถึง ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่า การเรียนรู้คณิตศาสตร์และการใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสารมีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจภาษาของคณิตศาสตร์ เป็นสะพานเชื่อมโยงสาระหรือความคิดที่ไม่เป็นทางการหรือสามัญสำนึกไปสู่ภาษาที่เป็นนามธรรมและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และยังมีบทบาทสำคัญในการช่วยให้นักเรียนสร้างความเชื่อมโยงที่สำคัญระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับสื่อที่เป็นวัตถุ รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ต่างๆ คำพูด และการแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ การใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสารยังช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในแนวคิดและเกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งกับสิ่งที่เรียน ดังที่ได้ระบุความสามารถที่ต้องการให้เกิดขึ้นในตัวของนักเรียนเกี่ยวกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

1. สามารถแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยการพูด การเขียน การสาธิต และการแสดงให้เห็นภาพ

2. สามารถทำความเข้าใจ แปลความหมาย และประเมินแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอโดย การพูด การเขียน หรือภาพต่างๆ

3. สามารถใช้ศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แสดงแนวคิด อธิบายความสัมพันธ์ และจำลองสถานการณ์

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 73) กล่าวว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่นักเรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องชัดเจน เป็นกระบวนสื่อสารที่มีลักษณะการใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร ตาราง กราฟ สมการ อสมการ ฟังก์ชันและแบบจำลองมาช่วยในการสื่อสาร

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989, p 26) กล่าวว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่นักเรียนควรจะจัดระบบและรวบรวมความคิดที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและสื่อสารได้ถูกต้อง สื่อสารแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ให้กับครูและผู้อื่นได้อย่างสมเหตุสมผล ทั้งยังวิเคราะห์ ประเมินค่าแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการต่างๆได้ และใช้ภาษาคณิตศาสตร์เพื่อการสื่อสาร สื่อความหมายได้อย่างถูกต้องชัดเจน

สมเดช บุญประจักษ์ (2540, หน้า 45) กล่าวว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงแนวคิด นำเสนอแนวคิด โดยการเขียน การแทนด้วยสัญลักษณ์ หรือแสดงแนวคิดโดยใช้สื่อต่างๆ เช่น แผนภูมิ แผนภาพ หรือกราฟ ความสามารถในการใช้ศัพท์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์และแสดงความสัมพันธ์ของแนวคิดทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 56-58) กล่าวว่า ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการอธิบาย ชี้แจง แสดงความเข้าใจหรือความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของตนเองให้ผู้อื่นได้รับรู้ จึงรวมความสามารถเกี่ยวกับการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอไว้ด้วยอย่างเช่น

1. อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสื่อรูปธรรม รูปภาพ และแผนภาพ กับแนวคิดทางคณิตศาสตร์
2. อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างภาษาในชีวิตประวันกับภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และสามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการสื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์
3. สร้างสถานการณ์โดยใช้การพูดและเขียน วัตถุรูปธรรม รูปภาพ กราฟ และวิธีการทางพีชคณิต
4. ออกแบบและนำเสนอข้อมูลในรูปแบบที่สื่อความหมายให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างชัดเจน
5. สะท้อนและอธิบายแนวคิดของตนเกี่ยวกับแนวคิดและสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ด้วยวาจาและด้วยการเขียน

กล่าวโดยสรุป ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถการใช้ภาษาสัญลักษณ์ การใช้รูปภาพ แผนภูมิ กราฟแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย

5.3 ความสำคัญของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 57) ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญในการทำให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างผู้สื่อสารกับผู้รับสาร โดยกระบวนการสื่อสาร ผู้สื่อสารจะต้องจัดระบบความคิดและสื่อเป็นภาษาพูดหรือเขียนให้ผู้รับสารเข้าใจตรงกัน ในขณะเดียวกัน ผู้รับสาร

ก็จะต้องทำความเข้าใจและคิดตามในสิ่งที่ผู้สื่อสารพูดหรือเขียน การสื่อสารทางคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญในการทำให้เกิดสิ่งต่อไปนี้

1. ก่อให้เกิดความเข้าใจร่วมกันระหว่างผู้เรียน ทำให้เข้าใจงานที่ทำตรงกัน
2. ส่งเสริมบริบทของการเรียนรู้ที่เหมาะสม เนื่องจากเป็นบริบทของการพูดจากัน
3. เพิ่มความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้กับทั้งผู้สื่อสารและผู้รับสาร
4. ช่วยให้ผู้สอนมองเห็นความเข้าใจของผู้เรียนซึ่งจะทำให้วางแผนจัดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551, หน้า 13) กล่าวว่า ทักษะการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอจะเป็นการพัฒนาผู้เรียน ที่จะทำให้ผู้เรียนได้รับการฝึกฝนให้รู้จักคิดวิเคราะห์ วางแผน ประเมินเนื้อหาอย่างมีเหตุผล ผู้เรียนจะเห็นความสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์กับเรื่องอื่นๆ สามารถสื่อความหมายของปัญหาที่พบด้วยคณิตศาสตร์ เป็นการเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนได้รับรู้ และนำความรู้ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ในงานอาชีพและการศึกษาคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ ในขั้นสูงต่อไป

กล่าวโดยสรุปความสำคัญของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ จะทำให้ผู้เรียนเข้าใจภาษาของคณิตศาสตร์มากขึ้น และใช้การสื่อสารเชื่อมโยงแนวคิดจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่รูปธรรม โดยมีสื่อที่เป็นวัตถุ รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ต่างๆ แทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในสิ่งที่เรียนได้ชัดเจนขึ้น

5.4 มาตรฐานของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เพื่อเป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ให้เป็นไปตามหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ซึ่งได้มีกรอบในการพัฒนาผู้เรียนไปสู่คุณภาพตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ดังนี้

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (อ้างถึงใน วรรณศิริ หลงรัก, 2553, หน้า 64 - 65) ได้กำหนดมาตรฐานของทักษะการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงเกรด 12 ไว้ดังนี้

1. จัดระบบและรวบรวมความคิดที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและสื่อสารได้ถูกต้อง
2. สื่อสารแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ให้กับครูและผู้อื่นได้อย่างสมเหตุสมผล
3. วิเคราะห์ ประเมินค่าแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการต่างๆได้
4. ใช้ภาษาคณิตศาสตร์เพื่อการสื่อสาร สื่อความหมายได้อย่างถูกต้องชัดเจน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551, หน้า 26) ได้กำหนดมาตรฐานการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ป.1-3 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนอได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ป.4-6 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนอได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ม.1-3 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และรัดกุม

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ม.ม.4-6 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และรัดกุม

มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร (2552, เว็บไซต์) ได้กล่าวถึงมาตรฐานของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของหลักสูตรการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ประเทศสหรัฐอเมริกาในศตวรรษที่ 21 ตั้งแต่ระดับชั้นที่ 3–12 ดังนี้

มาตรฐานการสื่อสารระดับชั้นที่ 3–5

1. อธิบายและรวบรวมความคิดทางคณิตศาสตร์ถึงการสื่อสาร
2. อธิบายและกำหนดค่าความคิดของคณิตศาสตร์และกลยุทธ์อื่นๆ
3. ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์แสดงถึงความคิดอย่างแน่นอน
4. มาตรฐานการสื่อสารสำหรับระดับชั้นที่ 6–8
5. จัดตั้งและสื่อสารสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์
6. อาจารย์สื่อสารให้กับนักเรียนได้ชัดเจน
7. วิเคราะห์และพิจารณาสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์
8. ใช้ภาษาคณิตศาสตร์เพื่อแสดงความคิดที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้อย่างแม่นยำ
9. มาตรฐานการสื่อสารสำหรับระดับชั้นที่ 9–12
10. จดจำและใช้การเชื่อมโยงระหว่างความคิดที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์
11. การสื่อด้านความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เกี่ยวกับกลุ่มตนเองและอาจารย์ได้อย่างชัดเจน
12. วิเคราะห์ พิจารณาความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และกลวิธีอื่นๆ
13. ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ

จากการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า มาตรฐานการสื่อสารทางคณิตศาสตร์มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถใช้คำศัพท์ สัญลักษณ์ และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงและอธิบายแนวความคิดได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน

5.5 แนวทางการพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2544, หน้า 198) ได้แนะนำการจัดการเรียนรู้ให้เกิดทักษะการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอมีแนวทางในการดำเนินการดังนี้

1. กำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน
2. ให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติและแสดงความคิดเห็นด้วยตนเอง โดยผู้สอนช่วยแนะแนวทางในการสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

การฝึกทักษะกระบวนการนี้ต้องทำอย่างต่อเนื่อง โดยสอดแทรกอยู่ทุกขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนคิดตลอดเวลาที่เห็นปัญหาว่า ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไร เขียนรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรเป็นอย่างไร จะใช้ภาพ ตาราง หรือ กราฟใดช่วยในการสื่อสารความหมาย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ร้านค้าแห่งหนึ่งมีลูกจ้าง 3 คน คือ แดง น้อย และจิต โดยแต่ละคนเสนอค่าจ้างทำงานชั่วโมงละ 100 110 120 บาท ตามลำดับ และมีงาน 3 อย่างคือ a b c

จำนวนชั่วโมงที่แดงทำงาน a b และ c คือ 7.5 , 8 และ 4.5 ชั่วโมง ตามลำดับ

จำนวนชั่วโมงที่แดงทำงาน a b และ c คือ 6 , 8.5 และ 5 ชั่วโมง ตามลำดับ

จำนวนชั่วโมงที่แดงทำงาน a b และ c คือ 6.5 , 7 และ 3.5 ชั่วโมง ตามลำดับ

อยากทราบว่านายจ้างควรให้ลูกจ้างคนใดทำงานอย่างใดที่สามารถทำงานนั้นเสร็จ และจ่ายเงินน้อยที่สุด และถ้านายจ้างต้องการรับลูกจ้างเพื่อเข้าทำงานทั้งสามอย่างเพียงหนึ่งคน เขาควรรับลูกจ้างคนใดเข้าทำงานจึงจะจ่ายน้อยที่สุด

ในการแก้ปัญหานี้ผู้เรียนจะวิเคราะห์ปัญหาและใช้ตารางช่วยในการสื่อสาร สื่อความหมายข้อมูลที่กำหนดให้ ดังตัวอย่าง

งาน	จำนวนชั่วโมงในการทำงาน		
	แดง	น้อย	จิต
a	7.5	6	6.5
b	8	8.5	7
c	4.5	5	3.5

จากนั้นผู้เรียนช่วยกันหาคำตอบและสร้างตารางใหม่เพื่อแสดงจำนวนเงินที่นายจ้างต้องจ่ายจากการทำงานทั้ง 3 อย่าง ดังตัวอย่าง

งาน	จำนวนชั่วโมงในการทำงาน		
	แดง	น้อย	จิต
a	750	660	780
b	800	935	840
c	450	550	420
รวม	2,000	2,145	2,040

ผู้เรียนสามารถใช้ตารางที่ 2 นำเสนอคำตอบดังนี้

ควรจ้างน้อยทำงาน a เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

ควรจ้างแดงทำงาน b เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

ควรจ้างจิตทำงาน c เพราะจ่ายค่าจ้างน้อยที่สุด

และควรจ้างแดงทำงานทั้ง 3 อย่าง เพราะจ่ายค่าจ้างในการทำงานรวมทั้ง 3 อย่างน้อยที่สุด

จากตัวอย่างข้างต้น แสดงให้เห็นการมีทักษะในการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอโดยใช้รูปแบบของตารางในการแก้ปัญหา

โรวานและมอร์โรว์ (Rowan & Morrow, 1993, pp. 9–11) ได้เสนอแนวทางในการส่งเสริม การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การนำเสนอสื่อรูปธรรม แล้วให้นักเรียนได้พรรณนาถึงสิ่งที่พบ

2. ใช้เนื้อหา เรื่องราว หรืองานที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวของนักเรียน เช่น โครงงานที่มีกิจกรรมสืบค้นเป็นสื่อที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสารโดยตรง กิจกรรมเช่นนี้ช่วยให้นักเรียนเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต และเป็นเรื่องราวที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวนักเรียนทำให้การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เป็นไปได้อย่างสมบูรณ์

3. การใช้คำถาม โดยเฉพาะคำถามปลายเปิดจะเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการ ตอบสนองออกมา คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่ให้โอกาสนักเรียนได้คิดอย่างหลากหลายและมีการคิดอย่างสร้างสรรค์

4. ให้โอกาสนักเรียนได้เขียนสื่อสารแนวคิด เพื่อให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนเป็นส่วนสำคัญของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องเข้าใจว่าทำไมจึงต้องเขียนอธิบาย นั่นคือเป้าหมายของการเขียนต้องชัดเจน

5. ใช้การเรียนแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจแนวคิด อธิบายแนวคิดกันในกลุ่มเป็นการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสาร

6. ใช้การชี้แนะโดยตรงและชี้แนะทางอ้อม การตอบสนองต่อคำถามของนักเรียน การบริหารและจัดระบบชั้นเรียน เป็นการชี้แนะให้นักเรียนได้ทราบถึงสิ่งที่คาดหวังและมาตรฐานของการเรียนรู้ เพื่อที่นักเรียนจะได้แสดงแนวคิดเหล่านั้นได้อย่างไม่ต้องกังวล

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000, pp. 4–5) กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ถามนั้น ถือเป็นการส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ควรให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับการแสดงเหตุผล โดยการเปิดโอกาสให้อธิบายเหตุผลกับเพื่อนร่วมชั้นเรียนหรือการคิดค้นหาคำตอบจากคำถามที่เกี่ยวกับบางสิ่ง เช่น ปริศนาต่างๆ ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นการส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจอันลึกซึ้งในความคิดของพวกเขา การจัดลำดับที่จะติดต่อสื่อสารระหว่างผู้เรียนกับแนวคิดของคนอื่นๆ ให้ผู้เรียนหลายคนตอบสนองอย่างเปิดเผยตรงไปตรงมาในการเรียนรู้ การจัดระบบ และรวบรวมแนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของพวกเขาเข้าด้วยกัน ผู้เรียนควรจะได้รับการสนับสนุนเพื่อพัฒนาความสามารถเฉพาะตัวของพวกเขาเองอย่างชัดเจนและต่อเนื่องตลอดเวลา เมื่อพวกเขาอายุมากขึ้นรูปแบบที่ตกลงกันของพวกเขาและการพูดอภิปราย ควรจะไม่ยึดติดกฎเกณฑ์แต่ควรมีการพิสูจน์เพื่อให้ได้แบบแผน และผู้เรียนควรจะทราบมากขึ้นเกี่ยวกับการสำนึกถึง การตอบสนอง และการรับฟังของผู้เรียน การส่งเสริมความสามารถพิเศษเกี่ยวกับการเขียนคณิตศาสตร์ที่ควรมีโดยเฉพาะในแต่ละระดับที่กำหนดในหลักสูตรการทำงานเพื่อที่จะแก้ปัญหาร่วมกับเพื่อนในชั้นเรียน ผู้เรียนจะได้มีโอกาสในการแสดงทัศนคติและวิธีอื่นๆ ผู้เรียน

สามารถเรียนรู้และประเมินค่าแนวความคิดอื่นๆ รู้จักการสร้างแนวความคิดใหม่ๆ ยกตัวอย่าง เช่น ให้ผู้เรียนลองแก้ปัญหาที่มีคำถามลักษณะพีชคณิตที่ได้แสดงไว้ดังต่อไปนี้

มีกระต่ายอยู่จำนวนหนึ่ง และมีกรงใส่กระต่ายอยู่อีกจำนวนหนึ่ง ถ้าเรานำกระต่ายใส่ในกรง กรงละ 1 ตัว จะมีกระต่ายเหลือ 1 ตัว ที่ต้องอยู่นอกกรง และถ้าเราใส่กระต่ายไว้กรงละ 2 ตัว จะมีกรงเหลือ 1 กรงที่ว่างอยู่ ถามว่ามีกระต่ายทั้งหมดกี่ตัว และมีกรงใส่กระต่ายกี่กรง

ผู้เรียนอาจจะช่วยเหลือและอาศัยความเข้าใจของผู้เรียนผู้ที่สามารถมองเห็นปัญหาและสามารถอธิบายให้เพื่อนเข้าใจได้ ผู้เรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ถึงจุดเด่นและจุดด้อยหรือขีดจำกัดของตนเองที่แตกต่างกันของผู้เรียนในแต่ละคนที่ใช้วิธีในการแก้ปัญหา ด้วยเหตุนี้การสื่อสารจึงจำเป็นสำหรับนักคิดคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 75) ได้ระบุว่า เพื่อให้ทักษะการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอมีประสิทธิผลยิ่งขึ้น ครูควรให้นักเรียนได้รับประสบการณ์ต่อไปนี้

1. มีส่วนร่วมอย่างกระฉับกระเฉง กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารมีโอกาสได้ซักถามหลังจากฟังคำอธิบาย มีโอกาสนำเสนอแนวคิดหรือเหตุผลที่ต่างออกไป หรือได้ลองลงมือปฏิบัติ

2. มีโอกาสทราบผลการกระทำทันที กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้ส่งสารได้รับคำติชมวิพากษ์วิจารณ์ทันทีในโอกาสแรกที่เป็นไปได้ ทั้งนี้ เพื่อจะได้ทราบว่าผู้รับสามารถรับสารได้ดีเพียงใด

3. มีความรู้สึกภาคภูมิใจและประสบการณ์ที่เป็นความสำเร็จ กล่าวคือ มีการท้าทายให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้คิดหรือได้ทำ ทั้งนี้ เพราะเมื่อทำได้สำเร็จก็จะเกิดความภาคภูมิใจ

4. มีโอกาสได้รับสารทีละน้อยตามขั้นตอน กล่าวคือ ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้ใคร่ครวญตามทีละน้อยจากง่ายไปยาก จนเข้าใจในเนื้อหาของสารที่จะได้รับการส่งเสริมให้เกิดการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ จะประสบความสำเร็จขึ้นอยู่กับปัจจัย 3 ประการ คือผู้สอน ผู้เรียน และเครื่องมือการจัดการเรียนรู้

5.5.1 บทบาทของผู้สอน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 76-77) ได้ระบุว่า ผู้สอนเปลี่ยนบทบาทจากการผูกขาดการพูดเพื่อบรรยายความรู้ แสดงตัวอย่าง หรือ เฉลยคำตอบ มาเป็นการฟังเหตุผลของผู้เรียน ผู้สอนเปรียบเสมือนผู้ควบคุมวงดนตรีออเคสตรา ให้ผู้เล่นดนตรีประเภทต่างๆ ร่วมกันบรรเลงเพลงเดียวกันได้อย่างไพเราะ ผู้สอนทำหน้าที่เป็นผู้กระตุ้นให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้อย่างกระฉับกระเฉง บทบาทของผู้สอนในการส่งเสริมการสื่อสารจึงกระทำโดย

1. เสนอคำถาม ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรืองานคณิตศาสตร์

2. ฟังความคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนอย่างตั้งใจและรอบคอบ

3. ถามคำถามเพื่อให้ผู้เรียนเกิดความชัดเจนในความคิดของตนเอง และเพื่อให้ผู้เรียนประเมินความคิดของตนเอง โดยให้พูดปากเปล่าหรือเขียน

4. ตัดสินใจว่า ท่ามกลางความคิดต่างๆ ของผู้เรียน ความคิดใดถูกต้องและมีรายละเอียด

5. ตัดสินใจว่าเมื่อใดและโดยวิธีการใดที่ผู้สอนควรเชื่อมโยงความคิดของผู้เรียนกับสัญลักษณ์และภาษาทางคณิตศาสตร์

6. ตัดสินใจว่าเมื่อใดผู้สอนควรให้ข้อมูลเพิ่มเติม เมื่อใดควรทำให้ประเด็นชัดเจน เมื่อใดควรเสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์ เมื่อใดควรชี้นำผู้เรียน เมื่อใดควรปล่อยให้ผู้เรียนเผชิญความยากของปัญหา

7. ติดตามการมีส่วนร่วมในการอภิปรายของผู้เรียน และตัดสินใจว่า เมื่อใดและอย่างไรควรกระตุ้นให้ผู้เรียนแต่ละคนมีส่วนร่วม

8. จากบทบาทของผู้สอนในการส่งเสริมการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ มีแง่มุมสำคัญที่ถือเป็นศูนย์กลางของการสื่อสาร ได้แก่

8.1 การกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างแก้ปัญหา ด้วยการใช้คำถามว่า ทำไม เพื่อให้ผู้เรียนอธิบายหรือให้รายละเอียดเพิ่มเติมความคิดของเขา ในการถามคำถามผู้สอนต้องแสดงความเคารพในความคิดของผู้เรียนมากกว่าจะถามคำถามเพื่อจับผิดหรือตัดสินว่าความคิดของผู้เรียนถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง

8.2 ผู้สอนเปลี่ยนบทบาทจากผู้พูด ผู้อธิบาย ผู้แสดงตัวอย่าง และผู้ตัดสินว่าสิ่งใดถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง มาเป็นการฟังผู้เรียนอธิบาย ผู้เรียนจะเป็นผู้กระทำ ผู้พูด ผู้อธิบาย สิ่งที่ผู้สอนต้องใส่ใจเป็นพิเศษ คือ ไม่ปล่อยให้ผู้เรียนอภิปรายโดยไม่มีประเด็น ผู้สอนต้องฟังอย่างตั้งใจและจับประเด็นสำคัญ เพื่อให้ได้ข้อมูลเพิ่มเติม หรือชี้นำผู้เรียนได้ ผู้สอนจึงต้องมีความรู้อย่างดีในเนื้อหาและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเข้าใจความคิดของผู้เรียน เพื่อตัดสินใจว่าสิ่งใดที่ผู้สอนควรปล่อยให้ผู้เรียนกระทำด้วยตนเองหรือด้วยกลุ่มย่อยของเขา และสิ่งใดที่ผู้สอนควรให้ข้อมูลเพิ่มเติม

8.3 ผู้สอนต้องติดตามและจัดการให้ผู้เรียนเข้ามามีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทั้งการแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลและเป็นกลุ่ม ผู้สอนต้องสังเกตว่า ผู้เรียนคนใดอาสาที่จะพูด ผู้เรียนคนใดไม่พูด ผู้เรียนสามารถบันทึกหรือเขียนสิ่งที่เขาคิดได้หรือไม่

ดังนั้นผู้สอนต้องกระตุ้นให้ผู้เรียนทุกคนมีส่วนร่วมในการคิด โดยให้ความเคารพความคิดของผู้เรียนและให้กลุ่มประเมินความคิดของสมาชิกในกลุ่ม ผู้สอนต้องใจกว้างและยอมรับ

วิธีการที่หลากหลายในการแสดงความคิดของผู้เรียน เช่น ใช้ภาพ ใช้กราฟ ใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม

บทบาทของผู้เรียนในการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้ปัญหาเป็นศูนย์กลาง ผู้เรียนเปลี่ยนบริบทจากผู้รับความรู้ด้วยการฟังครู (Passive learner) ไปเป็นผู้ที่สามารถพึ่งตนเองในการเรียนรู้ (Active learner) โดยฟังและตอบสนองต่อคำถามของผู้สอนและเพื่อน ใช้วิธีการที่หลากหลายในการแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์ สร้างความเชื่อมโยง แก้ปัญหาและสื่อสารและนำเสนอความคิดทางคณิตศาสตร์ ริเริ่ม เสนอปัญหาและข้อสงสัย สร้างข้อความคาดการณ์และนำเสนอคำตอบ สำรวจตัวอย่าง และตัวอย่างค้าน เพื่อสร้างและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของสิ่งที่แทนความคิด วิธีคิดหาคำตอบข้อความคาดการณ์ และคำตอบ เพื่อสร้างความเชื่อมั่นในตนเอง

5.5.2 เครื่องมือการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้เกิดการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2554, หน้า 78–80) ได้ระบุว่า ผู้สอนต้องเห็นคุณค่าและกระตุ้นให้ทั้งตัวผู้สอนเองและผู้เรียนใช้เครื่องมือการเรียนรู้อย่างหลากหลาย เช่น เครื่องคอมพิวเตอร์ เครื่องคิดคำนวณและเทคโนโลยีอื่นๆ วัสดุรูปธรรมเพื่อใช้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ รูป แผนภูมิ ตาราง และกราฟ คำศัพท์และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องราวในสภาพจริง การอธิบาย การเขียนการนำเสนอปากเปล่า และการแสดงบทบาทสมมติ สิ่งเหล่านี้สามารถนำมาใช้เพื่อการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ได้

กรณีศึกษาการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

การเรียนรู้คณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้ปัญหาเป็นศูนย์กลาง และมุ่งให้เกิดการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ รวมถึงบทบาทของผู้สอน บทบาทของผู้เรียน หรือการใช้เครื่องมือการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้เกิดการสื่อสาร

กรณีศึกษา : ทำอย่างไรให้เกิดสังคมแห่งการเรียนรู้ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

ครูสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 คนหนึ่ง ดำเนินการสอนเรื่องความน่าจะเป็นมาได้ 2-3 คาบ ครูพบว่าโจทย์ที่เสนอในแบบเรียนไม่น่าสนใจ ผู้เรียนมักระบุผลที่เป็นไปได้โดยการจำหรือคิดเลียนแบบตัวอย่าง ครูจึงศึกษาตำราคณิตศาสตร์อื่นๆ และสืบค้นจากเว็ปไซต์ จนเกิดแนวคิดการสร้างปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจเกี่ยวกับการใช้ความน่าจะเป็นตัดสินใจว่า เกมยุติธรรมหรือไม่ ครูเสนอปัญหา เกมทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน ปัญหาแรก พิจารณาผลบวกของแต้มที่หงาย ปัญหาที่สอง พิจารณาผลคูณของแต้มที่หงาย

เกมผลบวก

กำหนดผู้เล่นสองคน ผู้เล่นคนหนึ่ง “จำนวนคู่” ผู้เล่นอีกคนหนึ่งเป็น “จำนวนคี่” ผู้เล่นทั้งสองคนสลับกันโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน แล้วนำแต้มที่หงายของลูกเต๋าทั้งสองลูกมาบวกกัน

ถ้าผลบวกเป็นจำนวนคู่ ผู้ที่เล่นเป็น “จำนวนคู่” ได้ 1 คะแนน

ถ้าผลบวกเป็นจำนวนคี่ ผู้ที่เล่นเป็น “จำนวนคี่” ได้ 1 คะแนน

เกมผลคูณ

กำหนดผู้เล่นสองคน ผู้เล่นคนหนึ่ง “จำนวนคู่” ผู้เล่นอีกคนหนึ่งเป็น “จำนวนคี่” ผู้เล่นทั้งสองคนสลับกันโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน แล้วนำแต้มที่หงายของลูกเต๋าทั้งสองลูกมาคูณกัน

ถ้าผลคูณเป็นจำนวนคู่ ผู้ที่เล่นเป็น “จำนวนคู่” ได้ 1 คะแนน

ถ้าผลคูณเป็นจำนวนคี่ ผู้ที่เล่นเป็น “จำนวนคี่” ได้ 1 คะแนน

ครูกระตุ้นให้ผู้เรียนคิดว่า เกมทั้งสองนี้ยุติธรรมหรือไม่ โดยการเปิดประเด็นให้อภิปรายเกี่ยวกับความหมายของคำว่า “การเล่นเกมที่ผลเกิดอย่างยุติธรรม” จากนั้นอธิบายปัญหาและเงื่อนไขของปัญหาเกมโยนลูกเต๋าสองลูก และสั่งงานให้นักเรียนแก้ปัญหาเกมผลบวกและเกมผลคูณ เพื่อหาคำตอบว่าเกมทั้งสองเกมยุติธรรมหรือไม่ พร้อมทั้งระบุคำอธิบายประกอบการตัดสินใจ

นักเรียนจับคู่กันเพื่อแก้ปัญหาที่ครูมอบหมาย นักเรียนบางคู่สำรวจและสืบสอบด้วยการปฏิบัติการเล่นเกมแต่ละเกม และบันทึกผล บางคู่ไม่ลงมือปฏิบัติเล่นเกม แต่ใช้วิธีคิดวิเคราะห์เพื่อหาผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด ขณะนักเรียนกำลังแก้ปัญหา ครูจะเดินดูผู้เรียนอย่างทั่วถึง และตั้งใจฟังสิ่งที่ผู้เรียนสนทนากัน เพื่อนำสิ่งที่ครูเห็นและได้ยินเป็นรากฐานในการตั้งคำถามต่างๆ กับนักเรียนบางคู่ เช่น “ผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดคืออะไร” นักเรียนทราบได้อย่างไรว่า นี่คือผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด” “ทำไมนักเรียนจึงตัดสินใจว่าทดลองโยนลูกเต๋าสองลูก 36 ครั้ง”

ครูให้เวลานักเรียนพอสมควรในการปฏิบัติการเล่นเกมหรือวิเคราะห์เกม จากนั้นครูให้นักเรียนหยุดสำรวจเกม และให้เขียนวิธีคิดและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเกมทั้งสองเกมยุติธรรมหรือไม่ อย่างไร

ครูให้เวลานักเรียนเขียนแสดงวิธีคิดของเขา จากนั้นจึงเปิดให้มีการอภิปรายพร้อมกันทั้งชั้นในประเด็นที่ครูได้สังเกตและได้ยินจากการสนทนาระหว่างนักเรียน ครูเรียกนักเรียนคู่หนึ่งสมมติ คือ สุดาและเกียรติศักดิ์ นักเรียนทั้งสองช่วยกันอธิบายว่า “เกมผลบวกไม่ยุติธรรม แต่ไม่ได้ลองเล่นดูเพื่อยืนยันผลสรุป เพราะผลที่เป็นจำนวนคู่มีหกกรณี คือ 2,4,6,8,10 และ 12 แต่ผลที่เป็นจำนวนคี่มีเพียงห้ากรณี คือ 3,5,7,9 และ 11 ดังนั้นเกมนี้ไม่ยุติธรรมสำหรับผู้เล่นที่เป็น “จำนวนคี่”

ครูถามนักเรียนคนอื่นๆ ในชั้นว่า “คนอื่นๆ คิดอย่างไรกับความคิดของสุดาและเกียรติศักดิ์” ครูสังเกตว่ามีนักเรียนหลายคนส่ายหน้าไม่เห็นด้วย มีนักเรียนเพียง 2-3 คนเท่านั้นที่ผงกศีรษะว่าเห็นด้วย ครูเรียกมานะให้แสดงความคิดของเขา แม้ว่ามานะจะไม่ยกมือเพื่อขอพูด แต่ครูสังเกตสี

หน้าของมานะ มานะจ้องมาที่ครูและแสดงสีหน้าอยากจะเสนอมุมมองของตนเองต่อความคิดของสุดาและเกียรติศักดิ์ มานะพูดว่า “วิธีคิดของเพื่อนสองคนไม่น่าจะถูกต้อง เพราะว่ามีหลายวิธีทำให้ได้ผลบวกบางค่า เช่น 3 มีสองวิธีได้ผลบวกสาม แต่มีวิธีเดียวที่ได้ผลบวกสอง”

บรรยากาศในชั้นเรียนตอนนี้มีเสียงพึมพำด้วยความสงสัยของนักเรียนคนอื่นๆ ต่อวิธีคิดของมานะ ครูจึงถามคำถามให้มานะขยายความคิดของเขาว่า “ที่มานะพูดว่า การได้ผลบวก 3 มีวิธีคิดสองวิธี หมายความว่าอย่างไร” มานะให้รายละเอียดเพิ่มเติมความคิดของเขาว่า “วิธีที่หนึ่ง ลูกเต๋าลูกแรกหงายแต้ม 1 และลูกที่สองหงายแต้ม 2 วิธีที่สอง ลูกเต๋าลูกแรกหงายแต้ม 2 และลูกที่สองหงายแต้ม 1 นี่คือสองวิธีที่แตกต่างกัน” ครูกวาดสายตาไปที่นักเรียนคนอื่นๆ และพูดว่า “คนอื่นๆ คิดอย่างไรกับคำอธิบายของมานะ” จินตนายกมือและแสดงสีหน้าสงสัย ครูยิ้มและเรียกให้จินตนาพูด จินตนาแสดงความเห็นของเธอในเชิงปรึกษาหารือกับครู “หนูสงสัยว่าเป็นวิธีที่ต่างกันอย่างไร 1 บวกกับ 2 และ 2 บวกกับ 1 ก็ได้ 3 เหมือนกัน” ครูหันไปที่ทิวาที่แสดงสีหน้าสนใจและครุ่นคิด ครูถามทิวาว่า “ทิวา คิดอย่างไร” ทิวาเงียบและแสดงสีหน้าครุ่นคิดอยู่ชั่วครู่ ครูรอคำตอบของทิวาโดยแสดงสีหน้าว่าครูให้ความสำคัญกับความคิดของเขา เวลาผ่านไปชั่วครู่ ในที่สุดทิวาพูดว่า “เป็นสองวิธีที่ต่างกัน เพราะลูกเต๋าสองลูกต่างกัน”

ครูประสานสายตากับทิวาและผงกศีรษะ แล้วมองไปที่นักเรียนคนอื่นๆ แล้วชักชวนให้นักเรียนเสนอความคิดเห็นต่างๆ เพิ่มเติม ครูประเมินว่าความคิดต่างๆเพียงพอแล้ว ครูจึงนำอภิปรายสรุปเกี่ยวกับความคิดที่ถูกต้องและความคิดที่คลาดเคลื่อนที่นักเรียนมีต่อปัญหา จากนั้นให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเกมผลบวกและเกมผลลบ พร้อมทั้งให้เขียนสรุปถึงความคิดรวบยอดที่นักเรียนได้รับจากการแก้ปัญหานี้

ครูมอบหมายงานเป็นการบ้านเกี่ยวกับปัญหาเกมโยนเหรียญ ดังนี้

ปัญหาเกมโยนเหรียญ

เกมนี้ใช้ผู้เล่นสามคนโดยผลัดกันโยนเหรียญสองเหรียญพร้อมกัน

ผู้เล่นคนที่หนึ่งแทน “หงายหัวสองเหรียญ”

ผู้เล่นคนที่สองแทน “หงายก้อยสองเหรียญ”

ผู้เล่นคนที่สามแทน “หงายหน้าแบบผสม”

ถ้าผล หงายหัวทั้งสองเหรียญ ผู้เล่นคนที่หนึ่งได้ 1 แต้ม

ถ้าผล หงายก้อยทั้งสองเหรียญ ผู้เล่นคนที่สองได้ 1 แต้ม

ถ้าผล เหรียญหนึ่งเป็นหัว อีกเหรียญหนึ่งเป็นก้อย ผู้เล่นคนที่สามได้ 1 แต้ม

เกมนี้ยุติธรรมหรือไม่ จงแสดงการใช้คณิตศาสตร์มาอธิบาย

กรณีศึกษาข้างต้น มีประเด็นน่าสนใจเกี่ยวกับการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ครูรวบรวมข้อมูลจากการสอนเรื่องความน่าจะเป็น 2-3 ชั่วโมงก่อนหน้า และพบว่าหัวใจสำคัญประการหนึ่งของการเรียนรู้เรื่องความน่าจะเป็น คือ “การหาผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม” และปัญหาที่เกิดขึ้นจากการสอน คือ โจทย์ในแบบเรียนไม่อาจทำให้ผู้เรียนเข้าถึงประเด็นสำคัญข้างต้นได้ ครูจึงตัดสินใจใช้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สะท้อนความคิดรวบยอดเรื่องผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม และวิธีหาผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ครูสร้างขึ้นดัดแปลงจาก ปัญหาการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน โดยครูใส่สถานการณ์และเงื่อนไขของปัญหาในรูปเกมเพื่อให้ปัญหาน่าสนใจ ท้าทายให้คิด

2. ครูใช้เทคนิคถามคำถามเพื่อสำรวจว่านักเรียนมีความรู้และประสบการณ์เพียงใดเกี่ยวกับเรื่องความน่าจะเป็น ครูเลือกประเด็นคำถามเกี่ยวกับความหมายของคำว่าโอกาสการเกิดผลจากการทดลองสุ่มยุติธรรมหรือไม่ เพื่อให้เกิดการอภิปรายกลุ่มใหญ่ จากนั้นครูเสนอปัญหา เกมผลบวก และเกมผลคูณ ซึ่งเป็นปัญหาแปลกใหม่ท้าทายให้ผู้เรียนคิด

3. ครูใส่ใจกับสิ่งที่ผู้เรียนปฏิบัติและสิ่งที่ผู้เรียนพูดในกลุ่มย่อย เพื่อนำสิ่งที่ครูเห็นและได้ยินมาเป็นรากฐานในการตัดสินใจว่า ครูควรชี้แนะให้ผู้เรียนมุ่งความสนใจไปที่ประเด็นใด ครูควรชี้แนะนักเรียนมากน้อยแค่ไหน ครูให้เวลาผู้เรียนอย่างพอเพียง และเข้าไปมีส่วนร่วมรับรู้การคิดของผู้เรียนทุกกลุ่ม กลุ่มที่มีความสามารถและคิดถูกทางแล้ว ครูเข้าไปให้กำลังและชื่นชม กลุ่มที่อาจคิดคลาดเคลื่อน ครูเข้าไปชี้แนะโดยใช้คำถามให้ผู้เรียนฉุกคิดหรือมองต่างมุมออกไป ในกรณีนี้ครูพบว่า ความเข้าใจของผู้เรียนเกี่ยวกับคำว่า “เกมยุติธรรมหรือไม่” เป็นประเด็นสำคัญที่ครูต้องใส่ใจ ครูพบวิธีแก้ปัญหาของผู้เรียนอย่างหลากหลาย ทั้งลองปฏิบัติจริง และไม่ปฏิบัติแต่ใช้วิธีคิดวิเคราะห์ ครูพบความคิดที่น่าสนใจของผู้เรียนที่เลือกใช้วิธีทดลอง คือ ทดลองแค่ 36 ครั้งครูจึงกระตุ้นให้ผู้เรียนไตร่ตรองความคิดของตนเองด้วยการถามคำถามว่า “ทำไมจึงต้องทดลอง 36 ครั้ง” เพราะโดยหลักความจริงแล้ว การทดลองต้องทำซ้ำๆหลายครั้ง ยิ่งมากยิ่งดี เพราะทำให้เกิดผลที่เป็นไปได้ครอบคลุมทุกกรณี เหมือนกับการวิเคราะห์ผลที่เป็นไปได้ โดยใช้แผนภาพต้นไม้ หรือใช้ตาราง

4. ครูให้ความสำคัญกับรูปแบบการสื่อสารและการนำเสนอความคิดทางคณิตศาสตร์ทั้งพูดปากเปล่าและโดยการเขียน ในประเด็นการสื่อสารโดยการเขียน ครูให้ความสำคัญโดยสอดแทรกให้ผู้เรียนเขียนอธิบายเหตุผลความคิดของตน การให้ผู้เรียนเขียนอธิบายเหตุผลช่วยส่งเสริมให้ ผู้เรียนใช้สิ่งแทนความคิดทางคณิตศาสตร์รูปแบบต่างๆ เช่น ใช้ตาราง ใช้แผนภาพ นอกจากนี้ การเขียน ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์และระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ในบริบทต่างๆ

5. การตั้งใจสังเกตและฟังสิ่งที่ผู้เรียนสนทนาในกลุ่มย่อย ช่วยให้ครูมีข้อมูลประกอบการตัดสินใจว่า จะเรียกคนใดแสดงความคิดของเขาในการอภิปรายกลุ่มใหญ่ ครูเรียกสุดาและเกียรติศักดิ์ให้พูด เพราะเห็นว่านักเรียนทั้งสองคนมีความภูมิใจที่สามารถวิเคราะห์คำตอบโดยไม่ต้องลงมือปฏิบัติการทดลอง แม้ว่าคำตอบของเขาจะมีความคลาดเคลื่อน ครูคิดว่าจากความคิดที่คลาดเคลื่อนจะนำไปสู่ข้อสงสัยและก่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้องตามมา

6. ครูคาดหวังให้ผู้เรียนประเมินความสมเหตุสมผลของความคิดของเพื่อนจากการอภิปรายกลุ่มใหญ่ โดยสามารถให้เหตุผลว่า เห็นด้วยอย่างไร และไม่เห็นด้วยอย่างไร ครูตัดสินใจเลือกผู้เรียนที่มีความคิดต่างออกไป ให้ผู้เรียนคนนี้อธิบายความคิดของเขา การเรียกให้ผู้เรียนพูดสนับสนุนหรือโต้แย้งกัน ต้องกระทำอย่างรอบคอบ กล่าวคือ การให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมสนับสนุนความคิดของกันและกัน ถือเป็นรางวัลของผู้เป็นต้นคิดให้ความคิดนั้นถูกต้อง ย่อมนำไปสู่คำตอบที่น่าเชื่อถือ ถ้าความคิดนั้นคลาดเคลื่อน ทำให้ผู้เป็นต้นคิด ได้มองต่างมุม และทำให้นักเรียนในชั้นเกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น จากการเปรียบเทียบความคิดที่ต่างกัน

7. ถ้าผู้เรียนไม่สามารถอธิบายความคิดของตนให้ชัดเจนได้ ครูไม่ควรอธิบายให้เสียเอง แต่จะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนคนนั้นเพิ่มเติมตัวอย่างหรือเพิ่มเติมรายละเอียดในคำอธิบายของเขาและให้อธิบายใหม่

8. การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการคิดต่อยอดจากความคิดของกันและกัน (ทั้งเห็นด้วยและหักล้าง) เป็นหัวใจสำคัญของการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ และครูต้องอดทนที่จะรอคอยคำตอบจากผู้เรียน ครูต้องให้ความสำคัญกับทุกความคิดของผู้เรียน นอกจากนี้ครูต้องตัดสินใจได้ว่าควรหยุดการอภิปรายเมื่อผู้เรียนทุกคนสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

9. ครูควรประเมินว่าผู้เรียนเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับความคิดรวบยอดที่เป็นศูนย์กลางของปัญหาแล้วหรือไม่ ด้วยการมอบหมายปัญหาคณิตศาสตร์ให้ทำเป็นการบ้าน โดยปัญหานี้เป็นส่วนขยายของปัญหาที่ผู้เรียนได้เผชิญในชั้นเรียน

การสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ สะท้อนให้ทราบว่า ผู้เรียนรู้อะไรบ้าง ผู้เรียนมีเหตุผลอย่างไร ผู้เรียนปฏิบัติคณิตศาสตร์อย่างไร บทบาทหลักของผู้สอนคือการกระตุ้นด้วยการใช้คำถามเพื่อให้เกิดบรรยากาศของสังคมแห่งการเรียนรู้

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 58-61) กล่าวว่าการพัฒนาทักษะการสื่อสาร อาจเริ่มต้นจากสิ่งง่ายๆ เช่น ฝึกให้ผู้เรียนแสดงความคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้ภาษาของตัวเอง ในลักษณะที่ไม่เป็นทางการ (Informal style) ซึ่งจะเป็นการแสดงความคิดที่เกิดขึ้นแรกๆ (Initial thinking) หรือความรู้สึกที่ตนเพิ่งสร้างขึ้นมาหรือรับมา การฝึกในลักษณะนี้ ผู้สอนจะต้องมีความเข้าใจเกี่ยวกับภาษาทางคณิตศาสตร์และความหมายที่แตกต่างกันออกไปของคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากคำ

บางคำ เมื่อไม่อยู่ในบริบททางคณิตศาสตร์หรือเมื่อใช้ภาษาที่ไม่เป็นทางการ อาจมีความหมายอื่นที่แตกต่างจากความหมายในบริบทคณิตศาสตร์ เช่น คำว่า คู่ หักออก ผลที่ได้ เป็นต้น หลังจากการสื่อสารอย่างไม่เป็นทางการแล้ว ลำดับต่อไป ผู้สอนอาจฝึกให้ผู้เรียนสื่อสารอย่างเป็นทางการ (Formal style) ซึ่งเป็นภาษาที่ใช้เรียกหรือแสดงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นสากล ผู้เรียนอาจต้องพยายามและใช้เวลามากขึ้นในการแสดงความเข้าใจ หรือสื่อสารอย่างเป็นทางการกับผู้สอนและเพื่อนในชั้นเรียน อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะเป็นการสื่อสารในลักษณะใด หากผู้สอนต้องการฝึกทักษะการสื่อสารให้กับผู้เรียน ผู้สอนควรลดเวลาหรือปริมาณการพูดในห้องเรียนของตนให้น้อยลง ผู้เรียนจะได้สื่อสารกันมากขึ้น อันจะทำให้ผู้เรียนคุ้นเคยและสามารถพัฒนาทักษะการสื่อสารให้ดีขึ้นได้

สำหรับวิธีการสื่อสารนั้น ผู้สอนควรได้ฝึกให้ผู้เรียนได้พัฒนาการสื่อสารหลายๆ วิธี เช่น การพูด การเขียน แม้ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไปจะนิยมให้ผู้เรียนสื่อสารโดยการพูด แต่นักการศึกษาหลายท่านให้ความเห็นว่า การให้ผู้เรียนสื่อสารโดยการเขียนเป็นสิ่งจำเป็น บิกเนลล์ (Bicknell) แคมป์เบลล์ และโรแวน (Campbell & Rowan) เนื่องจากการเขียนให้ผู้อื่นอ่าน ผู้เรียนจะต้องจัดระบบความคิด และเรียบเรียงสิ่งที่จะสื่อสาร ซึ่งต้องใช้ความระมัดระวังมากกว่าการพูด จึงต้องมีการทบทวน ไตร่ตรอง ให้แน่ใจว่าความหมายของสิ่งที่กำลังอธิบายนั้นชัดเจนและตรงตามที่ตนเองต้องการบอกให้ผู้อื่นทราบซึ่งกระบวนที่ผู้เรียนได้สะท้อนความคิดในลักษณะนี้ จะก่อให้เกิดการคิดแบบสะท้อนความคิด (Reflective thinking)

ชีลและสวินซัน (Shield & Swinson, 1996) ได้เสนอแนวคิดในการใช้เอกสารเชื่อมโยง (Link sheet) ซึ่งมีลักษณะดังแผนภาพ เป็นเครื่องมือในการฝึกการสื่อสาร โดยให้ผู้เรียนอธิบายสิ่งที่ตนเข้าใจออกมาในรูปแบบของการเขียน เพื่อสื่อสารให้ผู้อื่นเข้าใจ เอกสารดังกล่าว นอกจากจะใช้ฝึกการสื่อสารแล้วยังอาจใช้เพื่อฝึกทักษะการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันได้ด้วย เนื่องจากมีส่วนหนึ่งที่ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่เรียน

เฮาส์ (House, 1996) ได้นำเสนอกิจกรรมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในหลายรูปแบบ เช่น การเขียนข่าวในหนังสือพิมพ์ (Newspapers) ซึ่งอาจเป็นข่าวที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ เช่น ข่าวธุรกิจและเศรษฐกิจ ข่าวการท่องเที่ยว ข่าวกีฬา การทำจดหมายข่าว (Newsletters) ของชั้นเรียนเป็นรายหนึ่งหรือสองเดือน การเขียนโฆษณา (Advertising campaigns) และการแต่งเพลง (Songs) ที่มีเนื้อเพลงเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ กิจกรรมเหล่านี้ เป็นสิ่งที่ผู้สอนมอบหมายให้ผู้เรียนทำได้ทั้งในและนอกห้องเรียน ซึ่งนอกจากจะเป็นการฝึกการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยตรงแล้ว ใน

กระบวนการทำงานผู้เรียนอาจได้พัฒนาทักษะอื่นด้วย เช่น ทักษะการเชื่อมโยงและการคิดริเริ่มสร้างสรรค์

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 77-83) กล่าวว่าการใช้คำถามเป็นปัจจัยสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยผู้สอนต้องพิจารณาสิ่งที่เกี่ยวข้องในหลายประเด็น เช่น ความสามารถของผู้เรียนที่จะตอบคำถาม สถานการณ์เฉพาะที่กำลังเกิดขึ้นในห้องเรียน ประโยชน์ที่จะเกิดจากการถามและตอบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างคำถามที่ต้องการพัฒนา	จุดประสงค์ของการถาม
ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ - อธิบายปัญหาให้เพื่อนฟังหน่อย - ข้อมูลที่โจทย์กำหนดบอกอะไรได้บ้าง -จะสรุปวิธีการแก้ปัญหานี้สั้นๆ ได้อย่างไร - ควรนำเสนอข้อมูลนี้ในรูปแบบใด เพราะเหตุใด	เพื่อให้ผู้เรียน - สื่อความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาโดยการพูด - สื่อความหมายของข้อมูลทางคณิตศาสตร์ - สื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพ - เลือกใช้การนำเสนอข้อมูลได้อย่างเหมาะสม

จากการศึกษาข้างต้นสรุปได้ว่า แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ นั้นครูผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดในการพูด การเขียน โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ มีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรม ตั้งแต่การอ่านเพื่อเข้าใจสถานการณ์ปัญหา พูดอธิบายและแลกเปลี่ยนแนวคิด และเขียนเป็นข้อสรุปร่วมกัน หากเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องและใกล้ตัวของนักเรียนจะช่วยให้นักเรียนเห็นคุณค่าคณิตศาสตร์ว่าเป็นวิชาที่มีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต

5.6 การวัดค่าทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

เคนเนดี้ และ ทิปส์ (Kennedy & Tipps, 1994, p. 112) ได้แบ่งการประเมินทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ด้าน ดังนี้

1. ภาษาคณิตศาสตร์ (Mathematics language)
   1.1 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์อย่างไม่เหมาะสม
   1.2 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์เหมาะสมเป็นบางครั้ง
   1.3 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์เหมาะสมเกือบทุกครั้ง
   1.4 ใช้ภาษาคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสม ถูกต้อง ชัดเจน
2. การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Representation)

2.1 ไม่ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2.2 ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นบางครั้ง

2.3 ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างเหมาะสมเกือบทุกครั้ง

2.4 ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องเหมาะสมทุกครั้ง

3. การนำเสนอความคิด (Presentation)

3.1 การนำเสนอไม่ชัดเจน (ไม่สมบูรณ์ ขาดรายละเอียด เนื้อหาสับสน)

3.2 การนำเสนอชัดเจนเป็นบางส่วน

3.3 การนำเสนอมีความชัดเจนเกือบสมบูรณ์

3.4 การนำเสนอชัดเจนดีมาก (สมบูรณ์ เป็นระบบ)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554, หน้า 199 - 121) ได้เสนอเกณฑ์การประเมินเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียน

สำหรับแบบทดสอบที่เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ สามารถกำหนดเกณฑ์ในการให้คะแนนอย่างกว้างๆ เช่น ตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

ส่วนแบบทดสอบที่เป็นอัตนัยมีเกณฑ์การให้คะแนนทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยแยกองค์ประกอบดังต่อไปนี้

ตาราง 2 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
4 ดีมาก	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอนเป็นระบบ กระชับ ชัดเจน และมีรายละเอียดสมบูรณ์
3 ดี	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง นำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบตามลำดับขั้นตอนได้ถูกต้องขาดรายละเอียดที่สมบูรณ์
2 พอใช้	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ พยายามนำเสนอโดยใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางแสดงข้อมูลประกอบชัดเจนบางส่วน
คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ปรากฏให้เห็น
1 ต้องปรับปรุง	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายๆ ไม่ได้ใช้กราฟ แผนภูมิ หรือตารางเลย และการนำเสนอข้อมูลไม่ชัดเจน
0 ไม่พยายาม	ไม่นำเสนอ

อัมพร ม้าคะนอง (2554, หน้า 179-180) กล่าวว่า การประเมิน การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในห้องเรียนมักเน้นที่การให้อธิบายวิธีการหรือเหตุผลโดยใช้การพูดและการเขียนอธิบาย ตัวอย่างการประเมินการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

1. วิชัยและฐิติพรเก็บสะสมเงินจากเงินเดือนของแต่ละคนเพื่อออมไว้เป็นค่าใช้จ่ายในอนาคต

แต่ละเดือนอัตราส่วนของจำนวนเงินที่วิชัยเก็บได้ต่อจำนวนเงินที่ฐิติพรเก็บได้คิดเป็น 5:7 ถ้าเดือนนี้ ทั้งสองคนเก็บเงินรวมกันได้ 1,860 บาท แต่ละคนเก็บเงินได้คนละเท่าใด พิจารณาวิธีแก้ปัญหาต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์ดังนี้

เงินรวมที่เก็บได้ 12 บาท มาจากเงินของวิชัย 5 บาท

เงินรวมที่เก็บได้ 1,860 บาท มาจากเงินของวิชัย $\frac{5 \times 1,860}{12}$ หรือ 775 บาท

จะได้ว่าวิชัยเก็บเงินได้ 775` บาท

และฐิติพรเก็บเงินได้ 1,860 – 775 หรือ 1,085 บาท

วิธีที่ 2 ใช้สัดส่วน

ให้ x แทนจำนวนเงินที่วิชัยเก็บได้

จะได้ $\frac{5}{12} = \frac{x}{1,860}$

และได้ x = 775

จึงได้ว่าวิชัยเก็บเงินได้ 775 บาท

และฐิติพรเก็บเงินได้ 1,860 – 775 หรือ 1,085 บาท

จากวิธีแก้ปัญหาทั้งสองวิธี ให้ตอบคำถามและอธิบายในประเด็นต่อไปนี้

1. วิธีแก้ปัญหาทั้งสองวิธีเหมือนกันหรือไม่ ให้อธิบายรายละเอียดประกอบ
2. วิธีใดมีประสิทธิภาพมากกว่า เพราะเหตุใด
3. ในการแก้ปัญหานี้มีวิธีอื่นอีกหรือไม่ ถ้ามี ให้นำเสนอประกอบ

2. ข้อมูลเกี่ยวกับการขายรถยนต์ภายในประเทศของรถยนต์ยี่ห้อต่างๆ ตลอดจนส่วนแบ่งการตลาด มีดังนี้

รถยนต์ยี่ห้อแอ็บบี้ (Abby) ขายจำนวน 7,628 คัน ในปี พ.ศ. 2548 จำนวน 8,213 คัน ในปี พ.ศ. 2549 และจำนวน 9,415 คัน ในปี พ.ศ. 2550 มีส่วนแบ่งการตลาดในทั้งสามปีเป็นร้อยละ

12.35, 16.72 และ 21.63 ตามลำดับ รถยนต์ยี่ห้อบลูเมอร์ (Bloomer) ขายจำนวน 15,265 คัน ในปี พ.ศ.2548 17,489 คัน ในปี พ.ศ. 2549 และ 17,956 คัน ในปี พ.ศ.2550 มีส่วนแบ่งการตลาดในทั้งสามปีเป็นร้อยละ 26.24, 32.15 และ 33.21 ตามลำดับ นอกนั้น เป็นการจำหน่ายรถยนต์ยี่ห้ออื่นๆ

จากข้อมูลข้างต้น ให้ทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. ออกแบบรูปแบบการนำเสนอข้อมูลเพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจข้อมูลโดยภาพรวมอย่างชัดเจนและรวดเร็ว

2. อธิบายว่ารูปแบบการนำเสนอข้อมูลในข้อ 1 เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลอย่างไร

ตัวอย่างการประเมินการสื่อสารข้างต้น แสดงให้เห็นถึงการสร้างประเด็นหรือเงื่อนไข ที่จะทำให้ผู้เรียนคิดได้หลากหลายแง่มุม ซึ่งจะเป็นสถานการณ์ที่เอื้อต่อการสื่อสาร สื่อความหมาย หรือการนำเสนอความคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจตรงกัน นอกจากนี้ ยังมุ่งให้ผู้เรียนได้ประเมินประสิทธิภาพในการสื่อสารของตนเองควบคู่ไปด้วย

ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยต้องการวัดการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยใช้เกณฑ์แบบทดสอบแบบปรนัย โดยแบ่งเป็นหัวข้อ ต่อไปนี้

1. การใช้ภาษา สัญลักษณ์ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์
2. การใช้รูปภาพ แผนภูมิ กราฟแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์
3. การแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย

ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม และวิธีการจัดการเรียนรู้แบบปกติ กับทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมกับทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำสู่บทเรียน เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนเตรียมความพร้อมและทบทวนความรู้เดิมเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ การใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนและครูสนทนาถึงความหมายของอัตราส่วนและ การเขียนอัตราส่วนแสดงความสัมพันธ์จากข้อความที่กำหนดให้

ขั้นที่ 2 ขั้นสร้างความรู้ เป็นขั้นที่สร้างสถานการณ์ให้ผู้เรียนเกิดข้อสงสัยอยากรู้ โดยใช้สถานการณ์ที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย ให้ผู้เรียนได้นำความรู้เดิมและประสบการณ์ที่ผ่านมาใช้ในการช่วยแก้สถานการณ์ ได้แบ่งออกเป็น 3 ขั้นย่อย ดังต่อไปนี้

2.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหาเป็นรายบุคคล เป็นขั้นที่ผู้เรียนได้นำความรู้เดิม และประสบการณ์ที่ผ่านมาใช้ในการช่วยแก้สถานการณ์ปัญหาที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย เป็นรายบุคคล โดยครูอาจมีการใช้คำถามกระตุ้น เพื่อให้ผู้เรียนหาแนวทางคำตอบที่จะเป็นไปได้ เช่น เช้าวันหยุดของสัปดาห์หนูเอ๋ยบอกคุณแม่ว่า อยากทานไข่เจียว แต่เผอิญไข่ไก่หมด คุณแม่ให้หนูเอ๋ยไปซื้อที่ร้านค้าข้างบ้าน หนูเอ๋ยซื้อไข่ไก่มา 3 ฟอง ราคา 10 บาท จากข้อความดังกล่าว สามารถนำมาพิจารณาจำนวนเงินที่เป็นราคาไข่ไก่ ดังต่อไปนี้

ไข่ไก่ (ฟอง)	3	6	9	12	15
จำนวนเงิน (บาท)	10	20	30	40	50

ถ้าหนูเอ๋ยต้องการซื้อไข่ไก่ 30 ฟอง จะต้องจ่ายเงินร้านค้ากี่บาท

2.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม เป็นขั้นที่ผู้เรียนได้ช่วยกันหาแนวทางคำตอบของสถานการณ์ปัญหาที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย เป็นรายกลุ่ม ซึ่งผู้เรียนจะต้องมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น ซักถาม อภิปรายกัน จนได้แนวทางคำตอบที่ดีที่สุดของกลุ่ม

2.3 ขั้นแก้ปัญหาร่วมกัน เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนในแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอวิธีการหาคำตอบของกลุ่ม และช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง โดยอาจมีครูช่วยอภิปรายและชี้แจงเพิ่มเติม ถ้านักเรียนใช้วิธีที่ยุ่งยากและซับซ้อนเกินไป

ขั้นที่ 3 ขั้นอภิปรายและสรุป เป็นขั้นที่นักเรียนและครูช่วยกันนำแนวทางในการหาคำตอบที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย ช่วยกันทั้งชั้นเรียนมาเป็นข้อสรุป เช่น นักเรียนและครูช่วยกันสรุปเกี่ยวกับ ขั้นตอนในการเขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบหรือแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ

อัตราส่วน คือความสัมพันธ์ ที่แสดงการเปรียบเทียบซึ่งอาจมีหน่วยเดียวกันหรือต่างกัน และอัตราส่วนของปริมาณ a ต่อ ปริมาณ b เขียนแทนด้วย a : b

ขั้นที่ 4 ขั้นนำความรู้ไปใช้ เป็นขั้นที่ผู้เรียนนำความรู้ที่ได้จากการอภิปรายและสรุป มาเป็นแนวทางในการหาคำตอบในสถานการณ์ต่างๆ ที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย ทั้งที่คุ้นเคยไม่คุ้นเคย เช่น ให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดให้ด้านล่างนี้ แล้วเขียนอัตราส่วนแสดงการเปรียบเทียบ เพื่อหาน้ำหนักของกระท้อนหยีต่อน้ำหนักขนมเปี๊ยะกล่องใหญ่

วันอาทิตย์ที่จะถึงนี้เป็นวันเกิดครบรอบ 60 ปีของคุณป้าดวงใจ น้องตุ้ยนุ้ยจึงไปเที่ยวงานหนึ่งตำบลหนึ่งผลิตภัณฑ์ (OTOP) เพื่อเลือกซื้อกระเช้าของขวัญให้คุณป้าผู้มีพระคุณ สินค้าที่น้องตุ้ยนุ้ยเลือกซื้อมีดังนี้ ขนมเปี๊ยะกล่องใหญ่ 0.5 กิโลกรัม ข้าวแต๋นธัญพืช 85 กรัม ขนมเปี๊ยะกล่องเล็ก 250 กรัม กระท้อนหยี 0.2 กิโลกรัม

ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการจัดการเรียนรู้แบบปกติกับทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เป็นดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ทบทวนพื้นฐานความรู้เดิมที่เชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ การใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ก่อนที่จะเรียนเนื้อหาต่อไป เพื่อให้ผู้เรียนมีพื้นฐานพอที่จะเรียนเนื้อหาใหม่ เช่น ครูทบทวนความหมายของร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ในรูปของเศษส่วน ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ หมายถึง เศษส่วนที่มีส่วนเป็น 100 เช่น 65 % หมายถึง $\frac{65}{100}$ หรือเขียนในรูปทศนิยมได้เท่ากับ 0.65 เป็นต้น

ขั้นที่ 2 สอนเนื้อหาใหม่ที่เชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ และในชีวิตประจำวันโดยเริ่มจากใช้ของจริงผู้เรียนปฏิบัติกิจกรรมโดยใช้ของจริง ใช้รูปภาพประกอบการสอน โดยเปลี่ยนสื่อประกอบกิจกรรม จากของจริงมาเป็นรูปภาพ ใช้สัญลักษณ์หลังจากที่ผู้เรียนปฏิบัติกิจกรรมจากของจริงและรูปภาพ แล้วครูใช้ตัวเลขและเครื่องหมายแทน เช่น ครูอธิบายถึงการเขียนอัตราส่วนต่างๆ ให้อยู่ในรูปร้อยละ โดยจะต้องทำปริมาณหลังให้เป็น 100 พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ เช่น

อัตราส่วน	ทำให้จำนวนหลัง อัตราส่วนเป็น 100	เขียนในรูป ร้อยละ
$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10} = \frac{4 \times 10}{10 \times 10} = \frac{40}{100}$	40 %
$\frac{15}{20}$	$\frac{15}{20} = \frac{15 \times 5}{20 \times 5} = \frac{75}{100}$	75 %
49:50	49:50 = 49×2 : 50 ×2 = 98 : 100	98 %

ขั้นที่ 3 ช่วยกันสรุปเป็นวิธีลัดเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ ผู้เรียนทดลองปฏิบัติสังเกต และช่วยกันสรุปความเข้าใจเป็นหลักการความคิดรวบยอด กฎ สูตร หรือวิธีลัด และใช้ภาษาสัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลายเช่น ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปหลักการเขียนอัตราส่วนให้อยู่ในรูปร้อยละ และใช้หลักการเท่ากันของอัตราส่วน โดยนำจำนวนใดๆ มาคูณหรือหารทั้งจำนวนหน้าและจำนวนหลังของอัตราส่วน เพื่อทำให้จำนวนหลังของอัตราส่วนเป็น 100 จะได้จำนวนแรกของอัตราส่วนนั้นเป็นค่าของร้อยละที่ต้องการ

ขั้นที่ 4 ฝึกทักษะ เมื่อนักเรียนสรุปหลักการความคิดรวบยอด กฎ สูตร หรือวิธีลัดได้แล้ว ผู้เรียนจะฝึกปฏิบัติจากหนังสือเรียนที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย

ขั้นที่ 5 นำความรู้ไปใช้ โดยมีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย โดยคาดหวังว่าผู้เรียนจะนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง

ขั้นที่ 6 ประเมินผล เป็นการตรวจสอบเพื่อวินิจฉัยว่า ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้หรือไม่ จากขั้นนำความรู้ไปใช้ที่มีการเชื่อมโยงเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทั้งยังมีการใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และมีการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย ถ้าผู้เรียนทำไม่ได้จะได้รับการสอนซ่อมเสริมก่อนเรียนเนื้อหาต่อไป

จากการการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม และวิธีการจัดการเรียนรู้แบบปกติ กับทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ แสดงรายละเอียดได้ดังตาราง 3

ตาราง 3 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของการจัดการเรียนรู้กับทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนรู้	ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์			ทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์		
	การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์กับเนื้อหาในคณิตศาสตร์	การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น	การนำความรู้ไปประยุกต์ใช้	การใช้ภาษา สัญลักษณ์แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์	การใช้รูปภาพ แผนภูมิ กราฟแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์	การแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย
ขั้นการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม						
1. ขั้นนำสู่บทเรียน	*			*	*	
2. ขั้นสร้างความรู้						
2.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหาเป็นรายบุคคล	*	*	*	*	*	*
2.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม	*	*	*	*	*	*
2.3 ขั้นแก้ปัญหาร่วมกัน	*	*	*	*	*	*
3. ขั้นอภิปรายและสรุป	*	*	* *	*	*	*
4. ขั้นนำความรู้ไปใช้	*	*		*	*	*
การจัดการเรียนรู้แบบปกติ						
1. ขั้นทบทวน	*			*	*	
2. ขั้นสอน	*		*	*	*	
3. ขั้นสรุปเป็นวิธีลัด	*			*	*	*
4. ขั้นฝึกทักษะ	*	*	*	*	*	*
5. ขั้นนำความรู้ไปใช้	*	*	*	*	*	*
6. ขั้นประเมินผล	*	*	*	*	*	*

จากตาราง 3 จะเห็นความสัมพันธ์ระหว่างการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ทั้งสองวิธีน่าจะส่งผลต่อทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในระดับที่ใกล้เคียงกัน เมื่อวิเคราะห์องค์ประกอบย่อยของวิธีการจัดการเรียนรู้แต่ละวิธีพบว่าลักษณะของการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมจะทำให้ผู้เรียนมีทักษะการเชื่อมโยงและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้ การจัดการเรียนรู้โดยเริ่มจากการนำเข้าสู่บทเรียน มีการสร้างความรู้จากสถานการณ์ปัญหา โดยการทำความเข้าใจปัญหาเป็นรายบุคคล วางแผนการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม และแก้ปัญหาร่วมกัน แล้วจึงอภิปรายและสรุป และนำความรู้ไปใช้ ส่วนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ มีลักษณะที่ทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะการเชื่อมโยงและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้ มีการทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม แล้วสอนเนื้อหาใหม่ มีการช่วยกันสรุปเป็นวิธีลัด ฝึกทักษะ แล้วนำความรู้ไปใช้ และมีการประเมินผล

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6.1 งานวิจัยในประเทศ

ไพจิตร สดวกการ (2539, บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลการสอนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเองที่มีต่อ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการถ่ายโยงการเรียนรู้ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 145 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 75 คน กลุ่มควบคุม 70 คน พบว่า นักเรียนระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปานกลางที่ได้รับการสอนด้วยกระบวนการสอนคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนระดับเดียวกันที่ได้รับการสอนตามปกติ ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01 แต่ไม่พบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติในนักเรียนระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงและต่ำ

ภัทราภรณ์ คัมภิรา (2543, บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัย การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เรื่องการคูณและการหารเบื้องต้น ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมและการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative learning) พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนการคูณและการหารเบื้องต้น ตามแนวคอนสตรัคติวิซึมและการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคิดเป็นร้อยละ 74.57 สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ร้อยละ 70 และมีจำนวนนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ดังกล่าวคิดเป็นร้อยละ 80.64 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์จำนวนนักเรียนที่กำหนดไว้ร้อยละ 80 และ นักเรียนที่ได้รับการสอนการคูณและการหารเบื้องต้น ตามแนวคอนสตรัคติวิซึมและการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้เกิดคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ได้แก่ การสร้างความรู้ความเข้าใจด้วยตนเอง มีวิธีการคิดและ

แก้ปัญหาอย่างเป็นเหตุเป็นผล ความเชื่อมั่นในตนเอง ความกล้าในการแสดงออก ทักษะการทำงานกลุ่ม ความรับผิดชอบต่อตนเองและกลุ่มและการช่วยเหลือซึ่งกันและกัน

รัชนีวรรณ ขันชัยภูมิ (2551, บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม ที่มีต่อทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนจำนวนร้อยละ 76.00 มีคะแนนทักษะการเชื่อมโยงคิดเป็นร้อยละ 75.60 ซึ่งผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ คือ ให้มีจำนวนนักเรียนไม่น้อยกว่าร้อยละ 70 มีคะแนนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไป และมีนักเรียนจำนวนร้อยละ 80.00 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคิดเป็นร้อยละ 77.04 ซึ่งผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ คือ ให้มีจำนวนนักเรียนไม่น้อยกว่าร้อยละ 70 มีคะแนนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ขึ้นไป

รุ่งนภา แก้ววงษา (2553, บทคัดย่อ) ได้ทำการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมกับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.01 และมีความความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์มากกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.01

วนิดา นนฤาชา (2553, บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.01 นักเรียนมีความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์อยู่ในระดับมากที่สุด

6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

เพียซา (Piazza, 1995, Abstract) ได้ทำการศึกษาวิจัยเพื่อประเมินผลของการสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม พบว่า การสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมช่วยให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้านคณิตศาสตร์ดีขึ้น ทั้งยังได้ช่วยครูพัฒนาการสอนของตนเอง

เวด (Wade, 1995, Abstract) ได้ศึกษาผลของการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการเข้าใจโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เจตคติและความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ของการเรียนของนักเรียนเกรด 5 ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม ผลของการทดลองพบว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่

ระดับ .05 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ต่ำ สูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ส่วนเจตคติและความเชื่อมั่นของกลุ่มตัวอย่างสูงขึ้น

บูลลอค (Bullock, 1996, Abstract) ได้ศึกษาผลของการสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมที่มีต่อเจตคติของนักศึกษาที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับครูระดับประถมศึกษา โดยมุ่งพิจารณาว่างานหรือเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่เปลี่ยนไป การสื่อสารหรือการอภิปรายที่เปลี่ยนไปและสภาพแวดล้อม ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เปลี่ยนไปมีอิทธิพลอย่างไรต่อเจตคติของนักศึกษา ผลปรากฏว่าการสอนตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมมีอิทธิพลต่อเจตคติในทางบวกต่อวิชาคณิตศาสตร์

อัลซัป (Alsup, 1996, Abstract) ได้ศึกษาผลของการสอนแบบคอนสตรัคติวิซึมของนักศึกษาฝึกสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้การเรียนรู้แบบแก้ปัญหาภายใต้การสอนโดยใช้แนวคิดคอนสตรัคติวิซึมในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ พบว่า วิธีสอนภายใต้ทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม สามารถพัฒนาการเรียน เรื่อง เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ และนักศึกษาฝึกสอน ลดความวิตกกังวลในการเรียนคณิตศาสตร์และช่วยให้นักศึกษาฝึกสอนมีความมั่นใจที่จะสอนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เคอร์ (Kerr, 1999, Abstract) ได้ศึกษางานวิจัยเรื่อง เครื่องมือในการสร้างองค์ความรู้เพื่อพัฒนา ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งศึกษาอยู่ในโรงเรียนในเมือง ประเด็นปัญหาคือ การสอนแบบปกติในวิชาคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่ำ ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของผู้เชี่ยวชาญในวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้ชี้ให้เห็นถึงความต้องการในการจัดการเรียนการสอนแบบให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้ การวิจัยได้กำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ในการพัฒนาการสร้างเครื่องมือ ดังนี้1) ความต้องการที่ระบุได้ 2) การแบ่งปันมุมมองในการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ 3) การสนับสนุนจากผู้เชี่ยวชาญ 4) การแบ่งปันจัดสรรข้อมูล 5) การเลือกวิธีการหลักสูตร 6) การฝึกและความเอาใจใส่ของผู้ปกครอง 7) การพัฒนาและสนับสนุนของผู้ร่วมงาน8) กระบวนการประเมิน ข้อค้นพบจากการศึกษาจากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ และทฤษฎีที่เป็นรูปสามเหลี่ยม ในด้านสติปัญญาและอารมณ์ ผลจากกระบวนการประเมินที่หลากหลายพบว่า มีการพัฒนาที่ดีขึ้น ยิ่งกว่านั้นผู้ปกครองและนักเรียนได้รายงานว่า การเรียนการสอนแบบสร้างองค์ความรู้ ทำให้นักเรียนมีเจตคติในการเรียนและทำให้นักเรียนมี ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนดีขึ้น

7. สรุปกรอบแนวคิดในกาวิจัย

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องข้างต้นสามารถสรุปเป็นกรอบแนวคิดในการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ที่มีต่อทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งประกอบไปด้วย ตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ดังนี้ ตัวแปรต้น คือ วิธีการจัดการเรียนรู้ 2 วิธี คือ การจัดการเรียนรู้ตามแนวคอนสตรัคติวิซึม ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นนำสู่บทเรียน ขั้นสร้างความรู้แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนย่อย ขั้นทำความเข้าใจปัญหาเป็นรายบุคคล ขั้นวางแผนการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ขั้นแก้ปัญหาร่วมกัน ขั้นอภิปรายและสรุป และขั้นนำความรู้ไปใช้ และการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 6 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นทบทวนพื้นฐานความรู้เดิม ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ ขั้นช่วยกันสรุปเป็นวิธีลัด ขั้นฝึกทักษะ ขั้นนำความรู้ไปใช้ และขั้นประเมินผล ตัวแปรตาม คือ ทักษะการเชื่อมโยงและทักษะการสื่อสารคณิตศาสตร์ ซึ่งทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ประกอบไปด้วย การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เนื้อหาในคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น และการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย การใช้ภาษา สัญลักษณ์ รูปภาพ แผนภูมิ กราฟแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศผู้วิจัยได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึม พบว่าช่วยให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น และมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ สามารถทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ทั้งยังสามารถสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น ผู้วิจัยจึงเลือกการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดคอนสตรัคติวิซึมมาใช้ในงานวิจัยครั้งนี้